

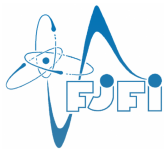
# Přesná řešení pro dvoufázové proudění v porézním prostředí: Můžeme věřit numerickému řešení?

Radek Fučík

Katedra matematiky FJFI ČVUT v Praze  
&

Center for Experimental Study of Subsurface Environmental Processes,  
Colorado School of Mines, Colorado, USA

Seminář současné matematiky 1. 3. 2017



CESEP



# Obsah

Matematické modelování

Proudění v porézním prostředí

Ukázková úloha dvoufázového proudění

Přehled přesných řešení

Přesné řešení v  $\mathbb{R}^d$  (a úkol pro SSM)

Pachatelé

# Obsah

## Matematické modelování

Proudění v porézním prostředí

Ukázková úloha dvoufázového proudění

Přehled přesných řešení

Přesné řešení v  $\mathbb{R}^d$  (a úkol pro SSM)

Pachatelé

# Co je to matematické modelování?



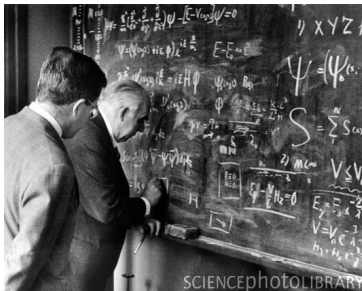
- Přírodní jev

# Co je to matematické modelování?



- Přírodní jev
- Studium přírodních zákonů

# Co je to matematické modelování?



- Přírodní jev
- Studium přírodních zákonů
- Fyzikální popis

# Co je to matematické modelování?



- Přírodní jev
- Studium přírodních zákonů
- Fyzikální popis
- Experimentální data (laboratorní výsledky)

# Co je to matematické modelování?


$$2x + y = 1$$

- Přírodní jev
- Studium přírodních zákonů
- Fyzikální popis
- Experimentální data (laboratorní výsledky)
- Matematický model

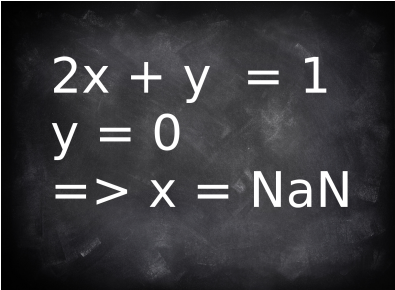


# Co je to matematické modelování?



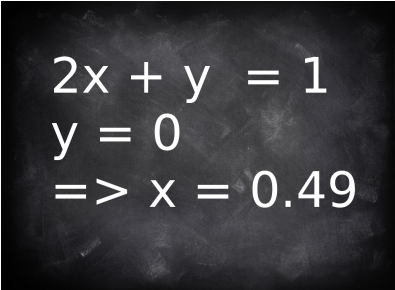
- Přírodní jev
- Studium přírodních zákonů
- Fyzikální popis
- Experimentální data (laboratorní výsledky)
- Matematický model
- Návrh numerické (počítačové) metody pro řešení modelu

# Co je to matematické modelování?


$$\begin{aligned}2x + y &= 1 \\ y &= 0 \\ \Rightarrow x &= \text{NaN}\end{aligned}$$

- Přírodní jev
- Studium přírodních zákonů
- Fyzikální popis
- Experimentální data (laboratorní výsledky)
- Matematický model
- Návrh numerické (počítačové) metody pro řešení modelu
- Implementace numerické metody

# Co je to matematické modelování?


$$\begin{aligned}2x + y &= 1 \\ y &= 0 \\ \Rightarrow x &= 0.49\end{aligned}$$

- Přírodní jev
- Studium přírodních zákonů
- Fyzikální popis
- Experimentální data (laboratorní výsledky)
- Matematický model
- Návrh numerické (počítačové) metody pro řešení modelu
- Implementace numerické metody
- Interpretace simulovaných výsledků

# Obsah

Matematické modelování

Proudění v porézním prostředí

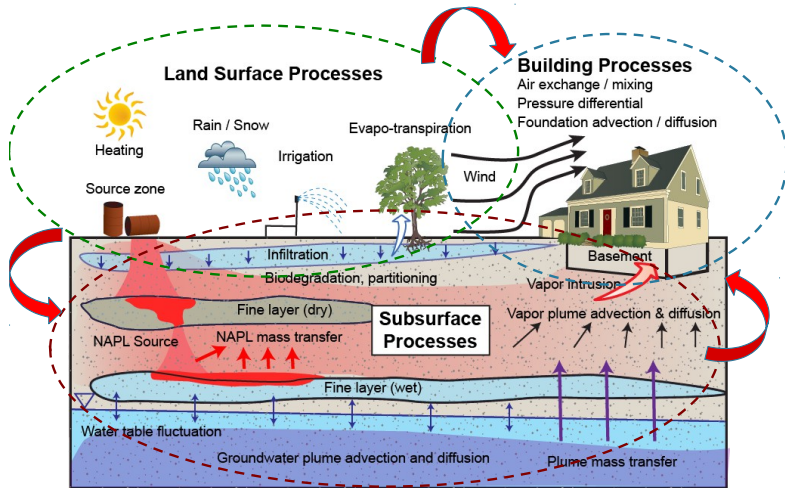
Ukázková úloha dvoufázového proudění

Přehled přesných řešení

Přesné řešení v  $\mathbb{R}^d$  (a úkol pro SSM)

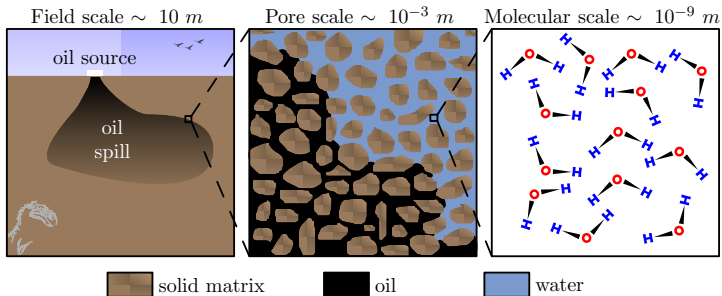
Pachatelé

# Motivace



[zdroj: SERDP Project No.ER-1687 Final report, 2014]

# Měřítko



# Matematické modelování dvoufázového proudění v porézním prostředí

- fáze: voda, plyn, NAPL  
(Non-Aqueous Phase Liquid)



Obrázek: Experiment [CESEP, Colorado School of Mines]

# Matematické modelování dvoufázového proudění v porézním prostředí

- fáze: voda, plyn, NAPL (Non-Aqueous Phase Liquid)
- nemísivé fáze



Obrázek: Experiment [CESEP, Colorado School of Mines]



# Matematické modelování dvoufázového proudění v porézním prostředí

- fáze: voda, plyn, NAPL (Non-Aqueous Phase Liquid)
- nemísivé fáze
- stlačitelné nebo nestlačitelné fáze



Obrázek: Experiment [CESEP, Colorado School of Mines]

# Matematické modelování dvoufázového proudění v porézním prostředí

- fáze: voda, plyn, NAPL (Non-Aqueous Phase Liquid)
- nemísivé fáze
- stlačitelné nebo nestlačitelné fáze
- kapilarita



Obrázek: Experiment [CESEP, Colorado School of Mines]

# Matematické modelování dvoufázového proudění v porézním prostředí

- fáze: voda, plyn, NAPL (Non-Aqueous Phase Liquid)
- nemísivé fáze
- stlačitelné nebo nestlačitelné fáze
- kapilarita
- gravitace



Obrázek: Experiment [CESEP, Colorado School of Mines]

# Matematické modelování dvoufázového proudění v porézním prostředí

- fáze: voda, plyn, NAPL (Non-Aqueous Phase Liquid)
- nemísivé fáze
- stlačitelné nebo nestlačitelné fáze
- kapilarita
- gravitace
- heterogenní prostředí



Obrázek: Experiment [CESEP, Colorado School of Mines]

# Rovnice dvoufázového proudění v $\mathbb{R}^d$

- Rovnice kontinuity pro fázi  $\alpha = w, n$ :

$$\frac{\partial(\phi\rho_\alpha S_\alpha)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_\alpha \vec{v}_\alpha) = F_\alpha$$

# Rovnice dvoufázového proudění v $\mathbb{R}^d$

- Rovnice kontinuity pro fázi  $\alpha = w, n$ :

$$\frac{\partial(\phi\rho_\alpha S_\alpha)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_\alpha \vec{v}_\alpha) = F_\alpha$$

- Darcyho zákon pro fázi  $\alpha = w, n$ :

$$\vec{v}_\alpha = -\lambda_\alpha \mathbf{K}(\nabla p_\alpha - \rho_\alpha \vec{g})$$

# Rovnice dvoufázového proudění v $\mathbb{R}^d$

- Rovnice kontinuity pro fázi  $\alpha = w, n$ :

$$\frac{\partial(\phi\rho_\alpha S_\alpha)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_\alpha \vec{v}_\alpha) = F_\alpha$$

- Darcyho zákon pro fázi  $\alpha = w, n$ :

$$\vec{v}_\alpha = -\lambda_\alpha \mathbf{K}(\nabla p_\alpha - \rho_\alpha \vec{g})$$

- Bilance saturace

$$S_w + S_n = 1$$

# Rovnice dvoufázového proudění v $\mathbb{R}^d$

- Rovnice kontinuity pro fázi  $\alpha = w, n$ :

$$\frac{\partial(\phi\rho_\alpha S_\alpha)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_\alpha \vec{v}_\alpha) = F_\alpha$$

- Darcyho zákon pro fázi  $\alpha = w, n$ :

$$\vec{v}_\alpha = -\lambda_\alpha \mathbf{K}(\nabla p_\alpha - \rho_\alpha \vec{g})$$

- Bilance saturace

$$S_w + S_n = 1$$

- Kapilární tlak

$$p_c = p_n - p_w = p_c(S_w)$$

(používají se empirické modely závislosti na saturaci)



# Rovnice dvoufázového proudění v $\mathbb{R}^d$

- Rovnice kontinuity pro fázi  $\alpha = w, n$ :

$$\frac{\partial(\phi\rho_\alpha S_\alpha)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_\alpha \vec{v}_\alpha) = F_\alpha$$

- Darcyho zákon pro fázi  $\alpha = w, n$ :

$$\vec{v}_\alpha = -\lambda_\alpha \mathbf{K}(\nabla p_\alpha - \rho_\alpha \vec{g})$$

- Bilance saturace

$$S_w + S_n = 1$$

- Kapilární tlak

$$p_c = p_n - p_w = p_c(S_w)$$

(používají se empirické modely závislosti na saturaci)

- Předpoklady pro některé z uvedených veličin:

$$p_\alpha = p_\alpha(t, \vec{x}) \quad \text{— tlak fáze } \alpha = w, n$$

— diferencovatelná funkce  $\forall t > 0$  a  $\forall \vec{x} \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^d$

— rozměr:  $[Pa]$

# Rovnice dvoufázového proudění v $\mathbb{R}^d$

- Rovnice kontinuity pro fázi  $\alpha = w, n$ :

$$\frac{\partial(\phi\rho_\alpha S_\alpha)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_\alpha \vec{v}_\alpha) = F_\alpha$$

- Darcyho zákon pro fázi  $\alpha = w, n$ :

$$\vec{v}_\alpha = -\lambda_\alpha \mathbf{K}(\nabla p_\alpha - \rho_\alpha \vec{g})$$

- Bilance saturace

$$S_w + S_n = 1$$

- Kapilární tlak

$$p_c = p_n - p_w = p_c(S_w)$$

(používají se empirické modely závislosti na saturaci)

- Předpoklady pro některé z uvedených veličin:

$$\rho_\alpha = \rho_\alpha(t, \vec{x}) \quad \begin{array}{l} \text{— hustota fáze } \alpha = w, n \\ \text{— diferencovatelná funkce } \forall t > 0 \text{ a } \forall \vec{x} \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^d \\ \text{— rozměr: } [kg \ m^{-3}] \end{array}$$

# Rovnice dvoufázového proudění v $\mathbb{R}^d$

- Rovnice kontinuity pro fázi  $\alpha = w, n$ :

$$\frac{\partial(\phi\rho_\alpha S_\alpha)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_\alpha \vec{v}_\alpha) = F_\alpha$$

- Darcyho zákon pro fázi  $\alpha = w, n$ :

$$\vec{v}_\alpha = -\lambda_\alpha \mathbf{K}(\nabla p_\alpha - \rho_\alpha \vec{g})$$

- Bilance saturace

$$S_w + S_n = 1$$

- Kapilární tlak

$$p_c = p_n - p_w = p_c(S_w)$$

(používají se empirické modely závislosti na saturaci)

- Předpoklady pro některé z uvedených veličin:

- $S_\alpha = S_\alpha(t, \vec{x})$  — saturace fáze  $\alpha = w, n$
- diferencovatelná funkce v čase  $\forall \vec{x} \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^d$
- po částech hladká funkce v prostoru  $\forall \vec{x} \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^d$
- rozměr: [1]

# Rovnice dvoufázového proudění v $\mathbb{R}^d$

- Rovnice kontinuity pro fázi  $\alpha = w, n$ :

$$\frac{\partial(\phi\rho_\alpha S_\alpha)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_\alpha \vec{v}_\alpha) = F_\alpha$$

- Darcyho zákon pro fázi  $\alpha = w, n$ :

$$\vec{v}_\alpha = -\lambda_\alpha \mathbf{K}(\nabla p_\alpha - \rho_\alpha \vec{g})$$

- Bilance saturace

$$S_w + S_n = 1$$

- Kapilární tlak

$$p_c = p_n - p_w = p_c(S_w)$$

(používají se empirické modely závislosti na saturaci)

- Předpoklady pro některé z uvedených veličin:

$$\lambda_\alpha = \lambda_\alpha(S_w) \quad \begin{array}{l} \text{— mobilita fáze } \alpha = w, n \\ \text{— diferencovatelná funkce } \forall S_w \in [0, 1] \\ \text{— rozměr: } [kg^{-1}ms^2] \end{array}$$

# Rovnice dvoufázového proudění v $\mathbb{R}^d$

- Rovnice kontinuity pro fázi  $\alpha = w, n$ :

$$\frac{\partial(\phi\rho_\alpha S_\alpha)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_\alpha \vec{v}_\alpha) = F_\alpha$$

- Darcyho zákon pro fázi  $\alpha = w, n$ :

$$\vec{v}_\alpha = -\lambda_\alpha \mathbf{K}(\nabla p_\alpha - \rho_\alpha \vec{g})$$

- Bilance saturace

$$S_w + S_n = 1$$

- Kapilární tlak

$$p_c = p_n - p_w = p_c(S_w)$$

(používají se empirické modely závislosti na saturaci)

- Předpoklady pro některé z uvedených veličin:

$$\vec{v}_\alpha = \vec{v}_\alpha(t, \vec{x}) \quad \begin{array}{l} \text{— Darcyho rychlost fáze } \alpha = w, n \\ \text{— vektorová funkce } \forall t > 0 \text{ a } \forall \vec{x} \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^d \\ \text{— patří do prostoru } H(\text{div}, \Omega) \\ \text{— rozměr: } [ms^{-1}]^d \end{array}$$

# Proudění v porézním prostředí

Více – viz předměty katedry matematiky:

- **01MMPV Matematické modely proudění podzemních vod**  
3. ročník BS, přednáší doc. Jiří Mikyška, Ph.D.
- **01DYK Dynamika kontinua** (trochu)  
letos (pondělky 15:30), přednáší Ing. Pavel Strachota, Ph.D. a RF

Obhájené práce na katedře matematiky v této problematice:

- Milan Hokr (DP 1999)
- Martin Vohralík (DP 2000)
- Jiří Mikyška (DP 2001, PhD 2005)
- RF (DP 2006, PhD 2010)
- Pavel Beneš (DP 2007)
- Kateřina Marková (DP 2010)
- Ondřej Polívka (BP 2008, DP 2010)
- Pavel Hron (BP 2008, DP 2011)
- Tereza Jindrová (BP 2012, DP 2013)
- Ondřej Šembera (BP 2013)
- Ondřej Pelech (BP 2014, DP 2016)
- Jakub Solovský (BP 2014, DP 2016)
- Jakub Klinkovský (BP 2015)
- Vojtěch Straka (BP 2016)

# Obsah

Matematické modelování

Proudění v porézním prostředí

Ukázková úloha dvoufázového proudění

Přehled přesných řešení

Přesné řešení v  $\mathbb{R}^d$  (a úkol pro SSM)

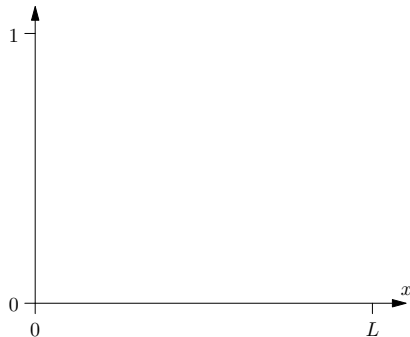
Pachatelé

## Ukázková úloha: Definice

Úloha dvoufázového proudění bez gravitace a kapilarity v  $\mathbb{R}^1$ :

$$\phi \frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial f(S)}{\partial x} = 0$$

kde  $x \in [0, L]$ ,  $t \in (0, T)$



Obrázek: Oblast  $[0, L]$ .



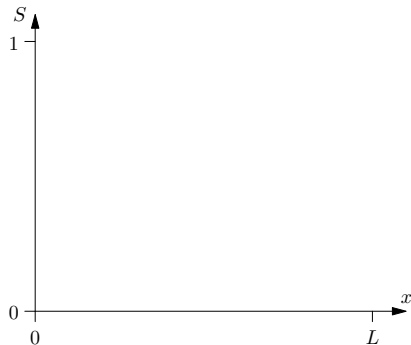
## Ukázková úloha: Definice

Úloha dvoufázového proudění bez gravitace a kapilarity v  $\mathbb{R}^1$ :

$$\phi \frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial f(S)}{\partial x} = 0$$

kde  $x \in [0, L]$ ,  $t \in (0, T)$  a:

- $S \dots$  saturace vody ( $S := S_w$ )



Obrázek: Oblast  $[0, L]$ .

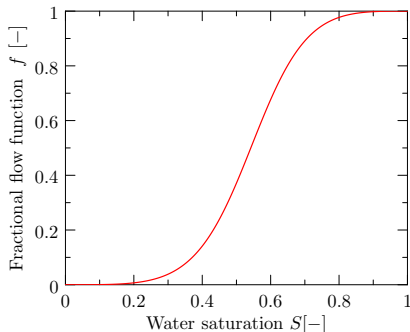
## Ukázková úloha: Definice

Úloha dvoufázového proudění bez gravitace a kapilarity v  $\mathbb{R}^1$ :

$$\phi \frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial f(S)}{\partial x} = 0$$

kde  $x \in [0, L]$ ,  $t \in (0, T)$  a:

- $S$  ... saturace vody ( $S := S_w$ )
- $f$  ... frakční toková funkce



Obrázek: Funkce  $f(S) = \frac{\lambda_w(S)}{\lambda_w(S) + \lambda_n(S)}$

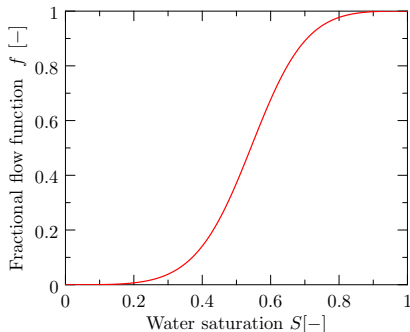
## Ukázková úloha: Definice

Úloha dvoufázového proudění bez gravitace a kapilarity v  $\mathbb{R}^1$ :

$$\phi \frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial f(S)}{\partial x} = 0$$

kde  $x \in [0, L]$ ,  $t \in (0, T)$  a:

- $S$  ... saturace vody ( $S := S_w$ )
- $f$  ... frakční toková funkce
- $\phi$  ... porozita



Obrázek: Funkce  $f(S) = \frac{\lambda_w(S)}{\lambda_w(S) + \lambda_n(S)}$

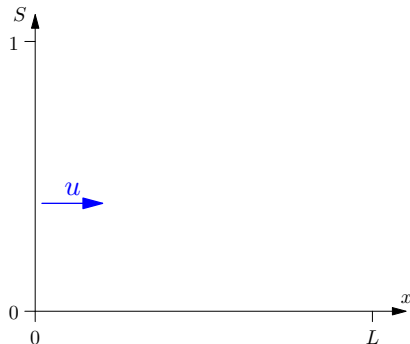
## Ukázková úloha: Definice

Úloha dvoufázového proudění bez gravitace a kapilarity v  $\mathbb{R}^1$ :

$$\phi \frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial f(S)}{\partial x} = 0$$

kde  $x \in [0, L]$ ,  $t \in (0, T)$  a:

- $S$  ... saturace vody ( $S := S_w$ )
- $f$  ... frakční toková funkce
- $\phi$  ... porozita
- $u$  ... Darcyho rychlost



Obrázek: Oblast  $[0, L]$ .

## Ukázková úloha: Definice

Úloha dvoufázového proudění bez gravitace a kapilarity v  $\mathbb{R}^1$ :

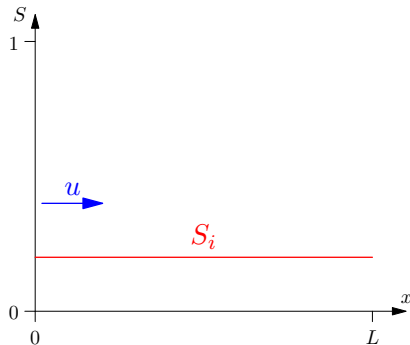
$$\phi \frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial f(S)}{\partial x} = 0$$

kde  $x \in [0, L]$ ,  $t \in (0, T)$  a:

- $S$  ... saturace vody ( $S := S_w$ )
- $f$  ... frakční toková funkce
- $\phi$  ... porozita
- $u$  ... Darcyho rychlost

Počáteční podmínka:

$$S(0, x) = S_i.$$



Obrázek: Oblast  $[0, L]$ .

## Ukázková úloha: Definice

Úloha dvoufázového proudění bez gravitace a kapilarity v  $\mathbb{R}^1$ :

$$\phi \frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial f(S)}{\partial x} = 0$$

kde  $x \in [0, L]$ ,  $t \in (0, T)$  a:

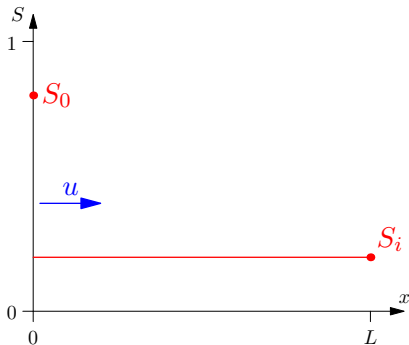
- $S$  ... saturace vody ( $S := S_w$ )
- $f$  ... frakční toková funkce
- $\phi$  ... porozita
- $u$  ... Darcyho rychlost

Počáteční podmínka:

$$S(0, x) = S_i.$$

Okrajová podmínka:

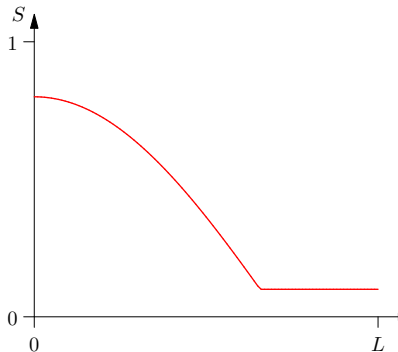
$$S(t, 0) = S_0, \quad S(t, L) = S_i.$$



Obrázek: Oblast  $[0, L]$ .

# Ukázková úloha: Diskretizace MKD

Časově explicitní metoda konečných diferencí (MKD):



Obrázek: Spojité řešení.

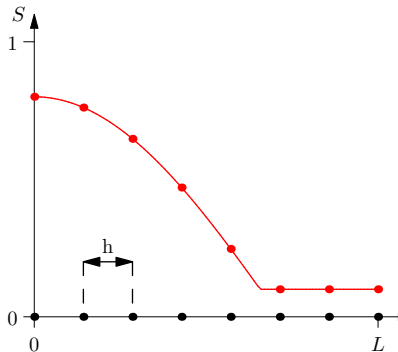
# Ukázková úloha: Diskretizace MKD

Časově explicitní metoda konečných diferencí (MKD):

- Prostorová diskretizace  $[0, L]$ :

$$x_\ell = \ell h,$$

kde  $h = \frac{L}{n}$ ,  $\ell = 0, 1, \dots, n$



Obrázek: Diskrétní aproximace.



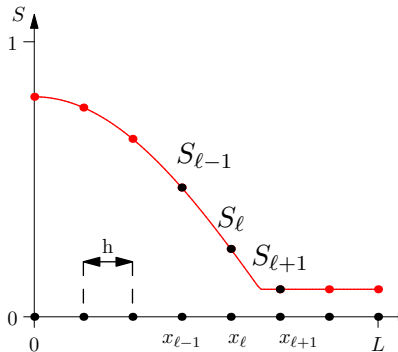
# Ukázková úloha: Diskretizace MKD

Časově explicitní metoda konečných diferencí (MKD):

- Prostorová diskretizace  $[0, L]$ :

$$x_\ell = \ell h,$$

kde  $h = \frac{L}{n}$ ,  $\ell = 0, 1, \dots, n$



Obrázek: Diskrétní aproximace.

# Ukázková úloha: Diskretizace MKD

Časově explicitní metoda konečných diferencí (MKD):

- Prostorová diskretizace  $[0, L]$ :

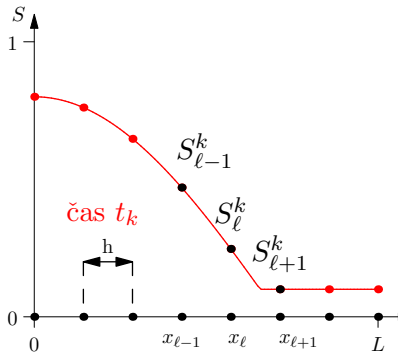
$$x_\ell = \ell h,$$

kde  $h = \frac{L}{n}$ ,  $\ell = 0, 1, \dots, n$

- Časová diskretizace  $[0, T]$ :

$$t_k = k\tau,$$

kde  $\tau = \frac{T}{m}$ ,  $k = 0, 1, \dots, m$



Obrázek: Diskrétní aproximace.

# Ukázková úloha: Diskretizace MKD

Časově explicitní metoda konečných diferencí (MKD):

- Prostorová diskretizace  $[0, L]$ :

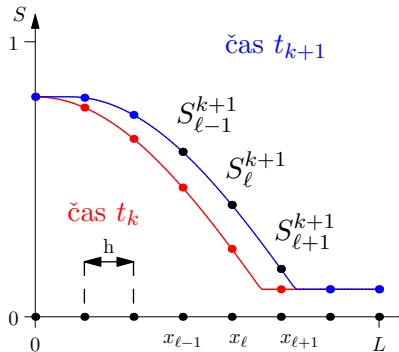
$$x_\ell = \ell h,$$

kde  $h = \frac{L}{n}$ ,  $\ell = 0, 1, \dots, n$

- Časová diskretizace  $[0, T]$ :

$$t_k = k\tau,$$

kde  $\tau = \frac{T}{m}$ ,  $k = 0, 1, \dots, m$



Obrázek: Diskrétní aproximace.

# Ukázková úloha: Diskretizace MKD

Časově explicitní metoda konečných diferencí (MKD):

- Prostorová diskretizace  $[0, L]$ :

$$x_\ell = \ell h,$$

kde  $h = \frac{L}{n}$ ,  $\ell = 0, 1, \dots, n$

- Časová diskretizace  $[0, T]$ :

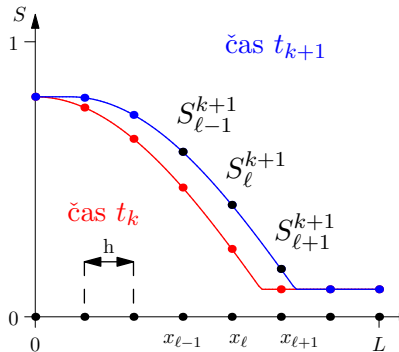
$$t_k = k\tau,$$

kde  $\tau = \frac{T}{m}$ ,  $k = 0, 1, \dots, m$

- Diskrétní aproximace derivací:

$$\frac{\partial S(t_k, x_\ell)}{\partial t} \approx \frac{S_\ell^{k+1} - S_\ell^k}{\tau}$$

$$\frac{\partial S(t_k, x_\ell)}{\partial x} \approx \frac{S_{\ell+1}^k - S_{\ell-1}^k}{2h} \quad (\text{centrální diference})$$



Obrázek: Diskrétní aproximace.

# Ukázková úloha: Numerické schéma

Úloha dvoufázového proudění bez gravitace a kapilarity v  $\mathbb{R}^1$ :

$$\phi \frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial f(S)}{\partial x} = 0,$$

$$S(t, 0) = S_0,$$

$$S(t, L) = S_i.$$

# Ukázková úloha: Numerické schéma

Úloha dvoufázového proudění bez gravitace a kapilarity v  $\mathbb{R}^1$ :

$$\phi \frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial f(S)}{\partial x} = 0,$$

$$S(t, 0) = S_0,$$

$$S(t, L) = S_i.$$

Numerické schéma:

# Ukázková úloha: Numerické schéma

Úloha dvoufázového proudění bez gravitace a kapilarity v  $\mathbb{R}^1$ :

$$\phi \frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial f(S)}{\partial x} = 0,$$

$$S(t, 0) = S_0,$$

$$S(t, L) = S_i.$$

Numerické schéma:

$$\phi \frac{S_\ell^{k+1} - S_\ell^k}{\tau}$$

$$S_0^k = S_0,$$

$$S_n^k = S_i.$$

# Ukázková úloha: Numerické schéma

Úloha dvoufázového proudění bez gravitace a kapilarity v  $\mathbb{R}^1$ :

$$\phi \frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial f(S)}{\partial x} = 0,$$

$$S(t, 0) = S_0,$$

$$S(t, L) = S_i.$$

Numerické schéma:

$$\phi \frac{S_\ell^{k+1} - S_\ell^k}{\tau} + u \text{ (?) } = 0,$$

$$S_0^k = S_0,$$

$$S_n^k = S_i.$$



## Ukázková úloha: Pokus 1

Aproximace derivace:

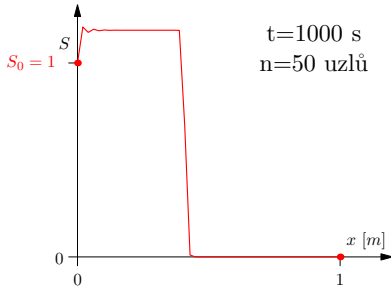
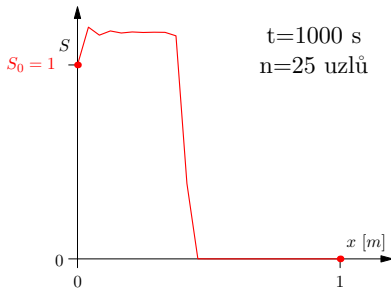
$$\frac{\partial f(S)}{\partial x} \approx \frac{df(\bar{S}_\ell^k)}{dS} \frac{S_{\ell+1}^k - S_{\ell-1}^k}{2h}$$

(centrální diference)

Poznámka:

$$\frac{\partial f(S)}{\partial x} = \frac{df(S)}{dS} \frac{\partial S}{\partial x}$$

(řetězové pravidlo)



## Ukázková úloha: Pokus 1

Aproximace derivace:

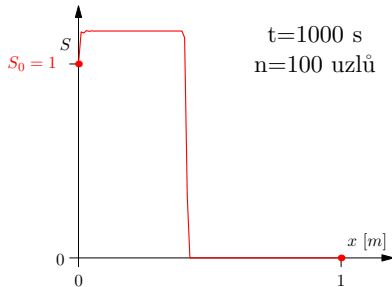
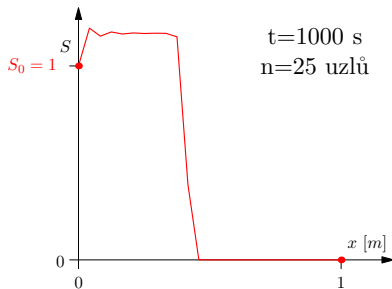
$$\frac{\partial f(S)}{\partial x} \approx \frac{df(\bar{S}_\ell^k)}{dS} \frac{S_{\ell+1}^k - S_{\ell-1}^k}{2h}$$

(centrální diference)

Poznámka:

$$\frac{\partial f(S)}{\partial x} = \frac{df(S)}{dS} \frac{\partial S}{\partial x}$$

(řetězové pravidlo)



## Ukázková úloha: Pokus 1

Aproximace derivace:

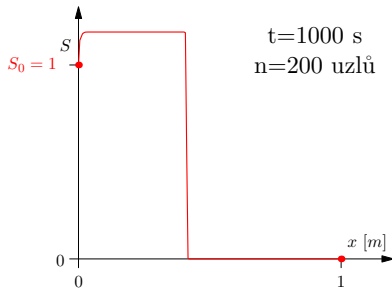
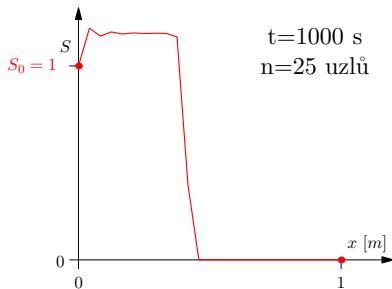
$$\frac{\partial f(S)}{\partial x} \approx \frac{df(\bar{S}_\ell^k)}{dS} \frac{S_{\ell+1}^k - S_{\ell-1}^k}{2h}$$

(centrální diference)

Poznámka:

$$\frac{\partial f(S)}{\partial x} = \frac{df(S)}{dS} \frac{\partial S}{\partial x}$$

(řetězové pravidlo)



## Ukázková úloha: Pokus 2

Stabilizace pomocí umělé vazkosti:

$$\phi \frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial f(S)}{\partial x} = \varepsilon \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}$$

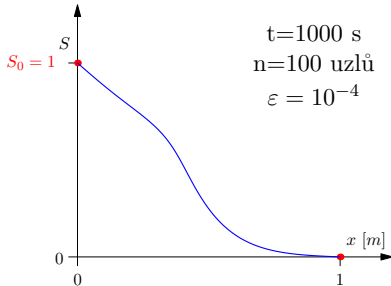
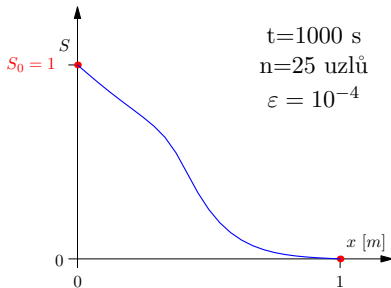
Aproximace derivace:

$$\frac{\partial f(S)}{\partial x} \approx \frac{df(\bar{S}_\ell^k)}{dS} \frac{S_{\ell+1}^k - S_{\ell-1}^k}{2h}$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \approx \frac{S_{\ell+1}^k - 2S_\ell^k + S_{\ell-1}^k}{h^2}$$

(centrální diference + stabilizace)

$\varepsilon \dots$  umělá vazkost (malá)



## Ukázková úloha: Pokus 2

Stabilizace pomocí umělé vazkosti:

$$\phi \frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial f(S)}{\partial x} = \varepsilon \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}$$

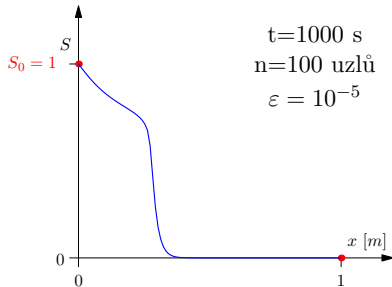
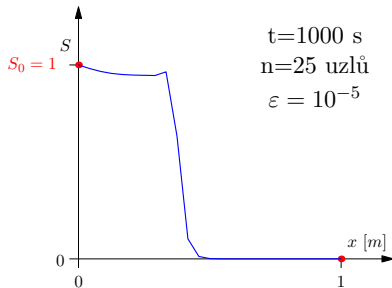
Aproximace derivace:

$$\frac{\partial f(S)}{\partial x} \approx \frac{df(\bar{S}_\ell^k)}{dS} \frac{S_{\ell+1}^k - S_{\ell-1}^k}{2h}$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \approx \frac{S_{\ell+1}^k - 2S_\ell^k + S_{\ell-1}^k}{h^2}$$

(centrální diference + stabilizace)

$\varepsilon \dots$  umělá vazkost (malá)



## Ukázková úloha: Pokus 2

Stabilizace pomocí umělé vazkosti:

$$\phi \frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial f(S)}{\partial x} = \varepsilon \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}$$

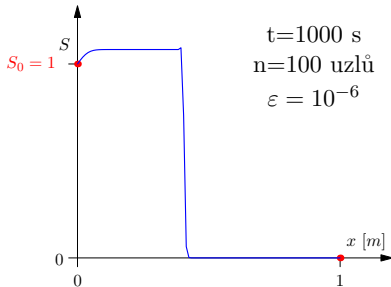
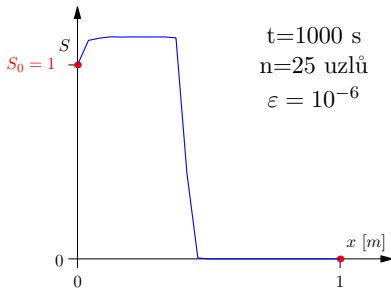
Aproximace derivace:

$$\frac{\partial f(S)}{\partial x} \approx \frac{df(\bar{S}_\ell^k)}{dS} \frac{S_{\ell+1}^k - S_{\ell-1}^k}{2h}$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \approx \frac{S_{\ell+1}^k - 2S_\ell^k + S_{\ell-1}^k}{h^2}$$

(centrální diference + stabilizace)

$\varepsilon$  ... umělá vazkost (malá)

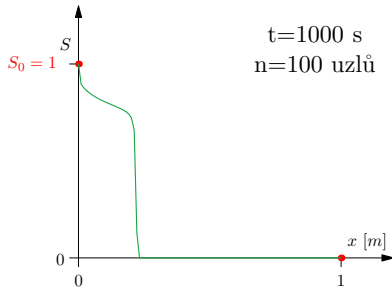
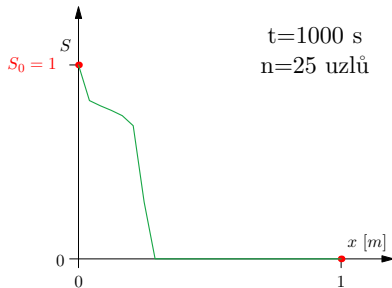


## Ukázková úloha: Pokus 3

Aproximace derivace:

$$\frac{\partial f(S)}{\partial x} \approx \frac{df(\bar{S}_\ell^k)}{dS} \frac{S_\ell^k - S_{\ell-1}^k}{h}$$

(upwind difference)

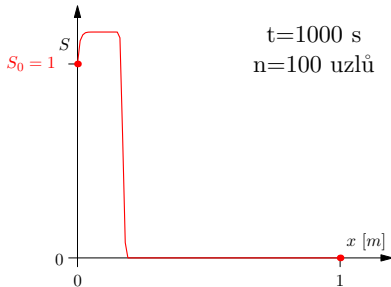
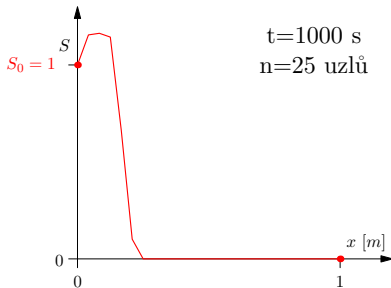


## Ukázková úloha: Pokus 4

Aproximace derivace:

$$\frac{\partial f(S)}{\partial x} \approx \frac{f(S_{\ell+1}^k) - f(S_{\ell-1}^k)}{2h}$$

(centrální diference)





## Ukázková úloha: Pokus 5

Vanishing viscosity stabilization:

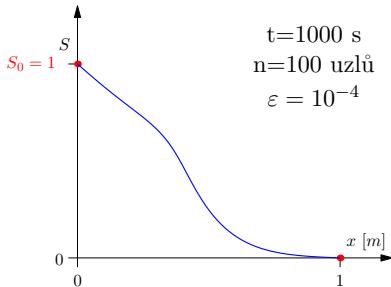
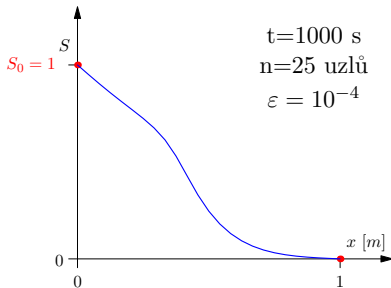
$$\phi \frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial f(S)}{\partial x} = \varepsilon \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}$$

Aproximace derivace:

$$\frac{\partial f(S)}{\partial x} \approx \frac{f(S_{\ell+1}^k) - f(S_{\ell-1}^k)}{2h}$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \approx \frac{S_{\ell+1}^k - 2S_{\ell}^k + S_{\ell-1}^k}{h^2}$$

(centrální diference + stabilizace)



## Ukázková úloha: Pokus 5

Vanishing viscosity stabilization:

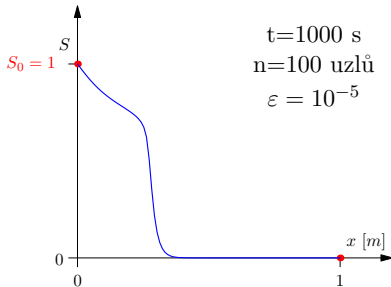
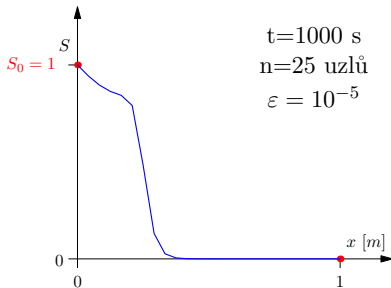
$$\phi \frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial f(S)}{\partial x} = \varepsilon \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}$$

Aproximace derivace:

$$\frac{\partial f(S)}{\partial x} \approx \frac{f(S_{\ell+1}^k) - f(S_{\ell-1}^k)}{2h}$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \approx \frac{S_{\ell+1}^k - 2S_{\ell}^k + S_{\ell-1}^k}{h^2}$$

(centrální diference + stabilizace)



## Ukázková úloha: Pokus 5

Vanishing viscosity stabilization:

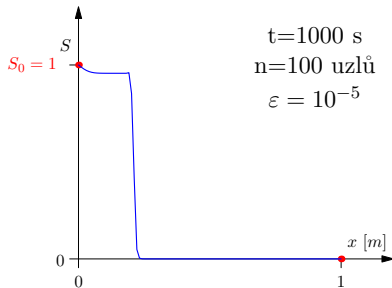
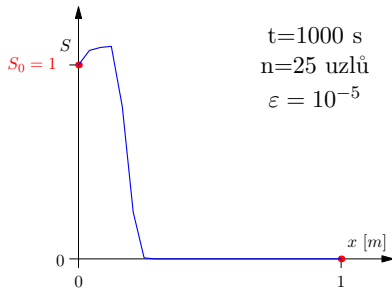
$$\phi \frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial f(S)}{\partial x} = \varepsilon \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}$$

Aproximace derivace:

$$\frac{\partial f(S)}{\partial x} \approx \frac{f(S_{\ell+1}^k) - f(S_{\ell-1}^k)}{2h}$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \approx \frac{S_{\ell+1}^k - 2S_{\ell}^k + S_{\ell-1}^k}{h^2}$$

(centrální diference + stabilizace)

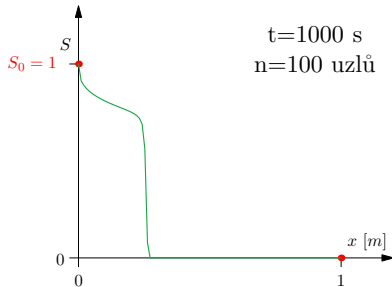
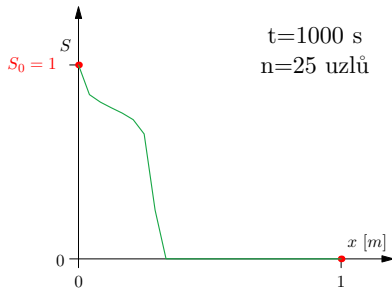


## Ukázková úloha: Pokus 6

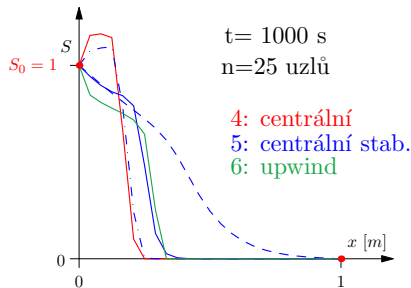
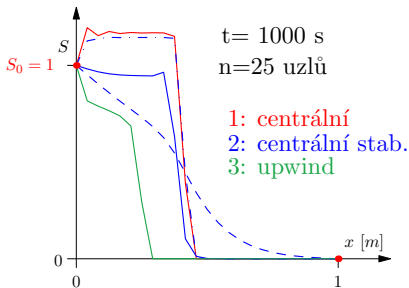
Aproximace derivace:

$$\frac{\partial f(S)}{\partial x} \approx \frac{f(S_\ell^k) - f(S_{\ell-1}^k)}{h}$$

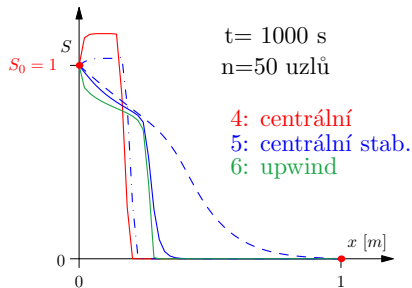
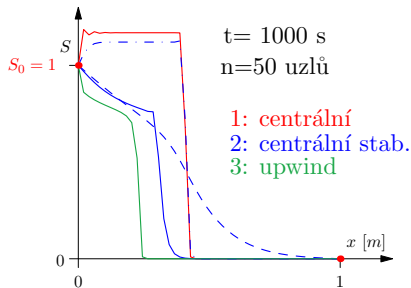
(upwind difference)



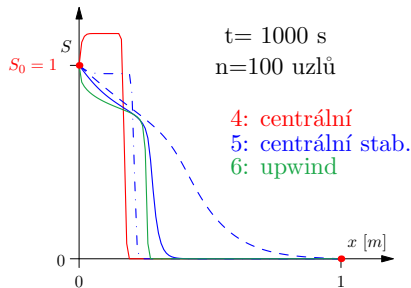
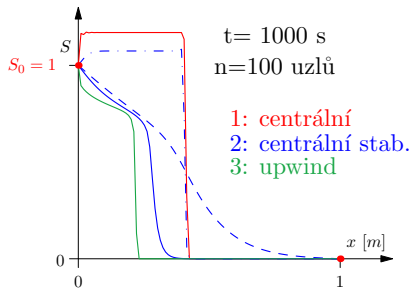
# Ukázková úloha: Shrnutí



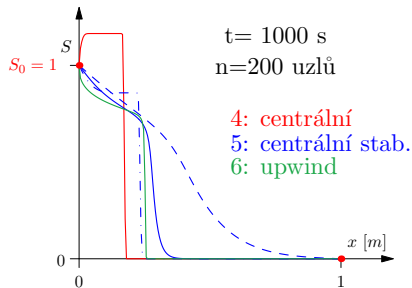
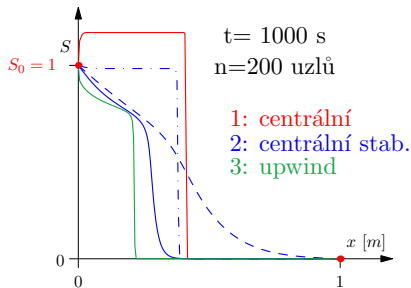
# Ukázková úloha: Shrnutí



# Ukázková úloha: Shrnutí

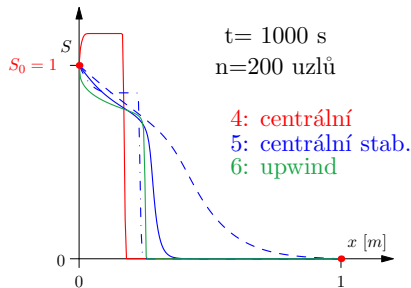
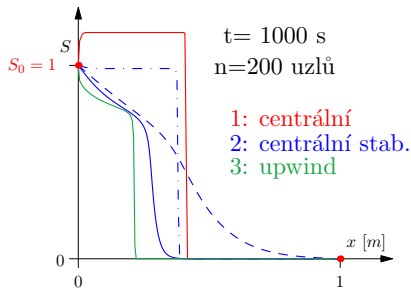


# Ukázková úloha: Shrnutí





# Ukázková úloha: Shrnutí



Co s tím?

# Obsah

Matematické modelování

Proudění v porézním prostředí

Ukázková úloha dvoufázového proudění

Přehled přesných řešení

Přesné řešení v  $\mathbb{R}^d$  (a úkol pro SSM)

Pachatelé

# Přehled přesných řešení

Přesná řešení pro homogenní porézní prostředí:

1. S. E. **Buckley** a M. C. **Leverett** (1942)
2. D. B. **McWhorter** a D. K. **Sunada** (1990)
3. R. **Fučík**, T. H. **Illangasekare**, a M. **Beneš** (2016)

Přesná řešení pro heterogenní porézní prostředí:

4. C. J. **van Duijn** a M. J. **de Neef** (1996)
5. R. **Fučík**, J. **Mikyška**, M. **Beneš**, a T. H. **Illangasekare** (2008)

# Přehled přesných řešení

Přesná řešení pro homogenní porézní prostředí:

1. S. E. **Buckley** a M. C. **Leverett** (1942)
2. D. B. **McWhorter** a D. K. **Sunada** (1990)
3. R. **Fučík**, T. H. **Illangasekare**, a M. **Beneš** (2016)

Přesná řešení pro heterogenní porézní prostředí:

4. C. J. **van Duijn** a M. J. **de Neef** (1996)
5. R. **Fučík**, J. **Mikyška**, M. **Beneš**, a T. H. **Illangasekare** (2008)

# Buckleyho and Leverettovo analytické řešení

Rovnice v  $\mathbb{R}^1$ :

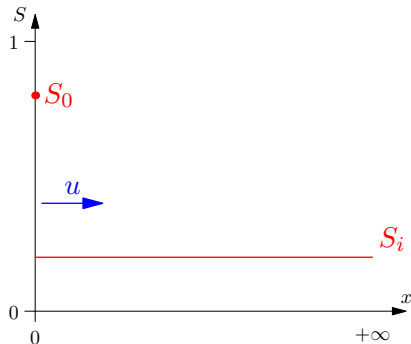
$$\phi \frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial f(S)}{\partial x} = 0$$

- jednorozměrná oblast
- homogenní porézní prostředí
- bez gravitace, bez kapilarity
- metoda charakteristik
- $u = u(t)$
- počáteční podmínka:

$$S(0, x) = S_i$$

- okrajová podmínka:

$$S(t, 0) = S_0$$



# Buckleyho and Leverettovo analytické řešení

Rovnice v  $\mathbb{R}^1$ :

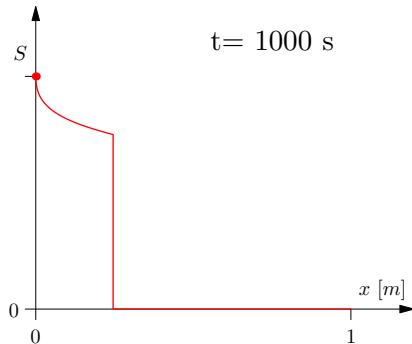
$$\phi \frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial f(S)}{\partial x} = 0$$

- jednorozměrná oblast
- homogenní porézní prostředí
- bez gravitace, bez kapilarity
- metoda charakteristik
- $u = u(t)$
- počáteční podmínka:

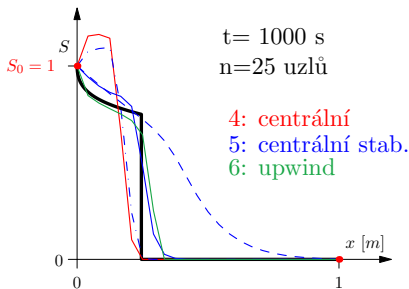
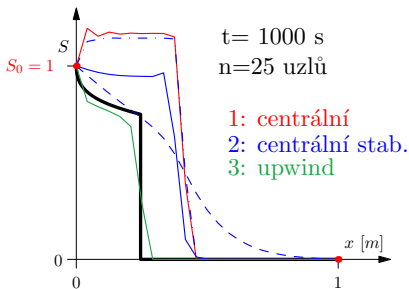
$$S(0, x) = S_i$$

- okrajová podmínka:

$$S(t, 0) = S_0$$

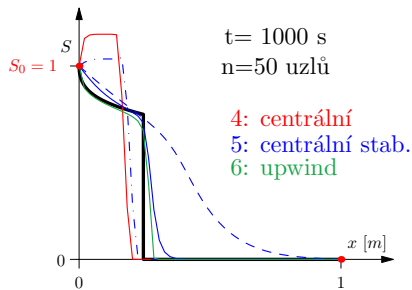
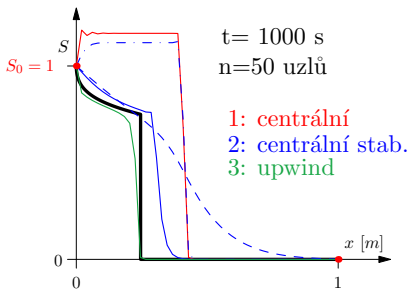


# Buckley a Leverett: Ukázková úloha



Numerické řešení vs. Buckleyho a Leverettovo analytické řešení (černě).

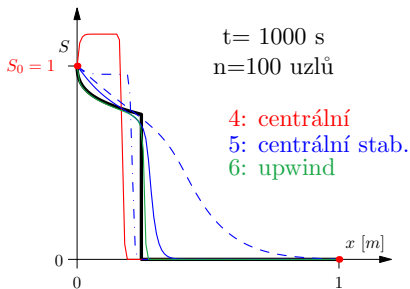
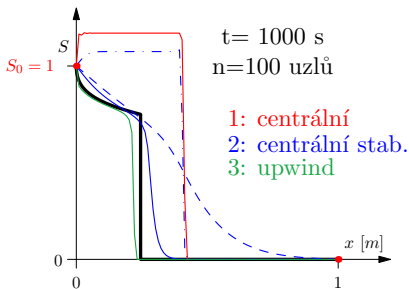
# Buckley a Leverett: Ukázková úloha



Numerické řešení vs. Buckleyho a Leverettovo analytické řešení (černě).

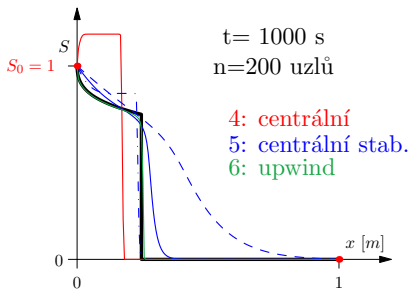
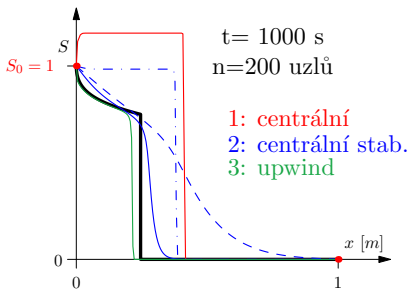


# Buckley a Leverett: Ukázková úloha



Numerické řešení vs. Buckleyho a Leverettovo analytické řešení (černě).

# Buckley a Leverett: Ukázková úloha



Numerické řešení vs. Buckleyho a Leverettovo analytické řešení (černě).

# Přehled přesných řešení

Přesná řešení pro homogenní porézní prostředí:

1. S. E. **Buckley** a M. C. **Leverett** (1942)
2. D. B. **McWhorter** a D. K. **Sunada** (1990)
3. R. **Fučík**, T. H. **Illangasekare**, a M. **Beneš** (2016)

Přesná řešení pro heterogenní porézní prostředí:

4. C. J. **van Duijn** a M. J. **de Neef** (1996)
5. R. **Fučík**, J. **Mikyška**, M. **Beneš**, a T. H. **Illangasekare** (2008)

# McWhorterovo a Sunadovo řešení v $\mathbb{R}^1$

Rovnice v  $\mathbb{R}^1$ :

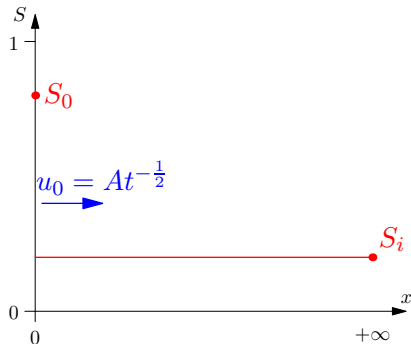
$$\phi \frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial f(S)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( D(S) \frac{\partial S}{\partial x} \right)$$

- bez gravitace
- $D(S)$  funkce kapilární difúze
- $u = RA t^{-\frac{1}{2}}$
- $A = A(S_0)$ ,  $R \in (-\infty, 1]$  \*
- počáteční podmínka:

$$S(0, x) = S_i$$

- okrajové podmínky:

$$S(t, 0) = S_0, \quad S(t, +\infty) = S_i$$



\*R. Fučík, J. Mikyška, T. H. Illangasekare, M. Beneš (2007)

# McWhorterovo a Sunadovo řešení v $\mathbb{R}^1$

Rovnice v  $\mathbb{R}^1$ :

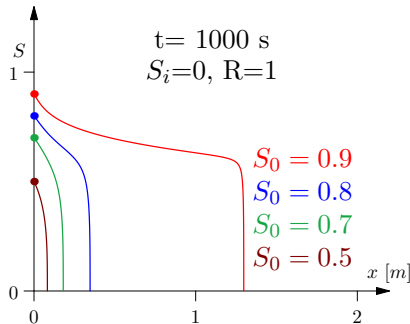
$$\phi \frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial f(S)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( D(S) \frac{\partial S}{\partial x} \right)$$

- bez gravitace
- $D(S)$  funkce kapilární difúze
- $u = RA t^{-\frac{1}{2}}$
- $A = A(S_0)$ ,  $R \in (-\infty, 1]$  \*
- počáteční podmínka:

$$S(0, x) = S_i$$

- okrajové podmínky:

$$S(t, 0) = S_0, \quad S(t, +\infty) = S_i$$



\*R. Fučík, J. Mikyška, T. H. Illangasekare, M. Beneš (2007)

# McWhorterovo a Sunadovo řešení v $\mathbb{R}^1$

Rovnice v  $\mathbb{R}^1$ :

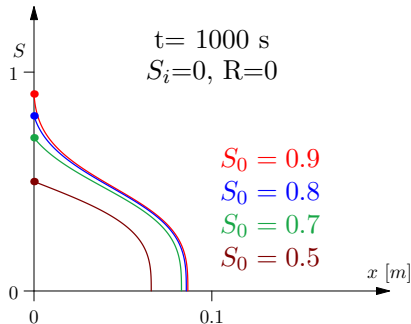
$$\phi \frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial f(S)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( D(S) \frac{\partial S}{\partial x} \right)$$

- bez gravitace
- $D(S)$  funkce kapilární difúze
- $u = RA t^{-\frac{1}{2}}$
- $A = A(S_0)$ ,  $R \in (-\infty, 1]$  \*
- počáteční podmínka:

$$S(0, x) = S_i$$

- okrajové podmínky:

$$S(t, 0) = S_0, \quad S(t, +\infty) = S_i$$



\*R. Fučík, J. Mikyška, T. H. Illangasekare, M. Beneš (2007)

# McWhorterovo a Sunadovo řešení v $\mathbb{R}^2$

Rovnice v  $\mathbb{R}^2$  (radiální proudění):

$$\phi \frac{\partial S}{\partial t} + \nabla \cdot (f(S)\vec{u} - D(S)\nabla S) = 0$$

- bez gravitace
- $D(S)$  funkce kapilární difúze
- konstantní vtláčení nesmáčivé fáze v  $\vec{0}$
- konstantní  $\vec{u}$  (v radiálním směru)

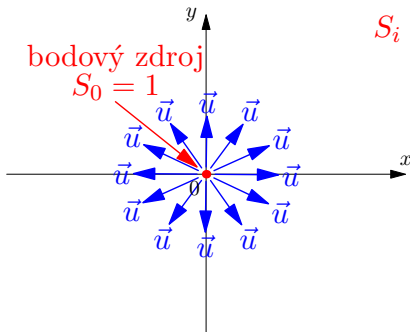
$$\|\vec{u}\| = A$$

- počáteční podmínka:

$$S(0, \vec{x}) = S_i$$

- okrajové podmínky:

$$S(t, \vec{0}) = 1, \quad S(t, \infty) = S_i$$



# McWhorterovo a Sunadovo řešení v $\mathbb{R}^2$

Rovnice v  $\mathbb{R}^2$  (radiální proudění):

$$\phi \frac{\partial S}{\partial t} + \nabla \cdot (f(S)\vec{u} - D(S)\nabla S) = 0$$

- bez gravitace
- $D(S)$  funkce kapilární difúze
- konstantní vtláčení nesmáčivé fáze v  $\vec{0}$
- konstantní  $\vec{u}$  (v radiálním směru)

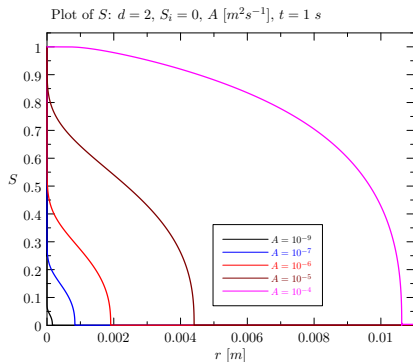
$$\|\vec{u}\| = A$$

- počáteční podmínka:

$$S(0, \vec{x}) = S_i$$

- okrajové podmínky:

$$S(t, \vec{0}) = 1, \quad S(t, \infty) = S_i$$



Obrázek: Různé hodnoty  $A$ .



# McWhorterovo a Sunadovo řešení v $\mathbb{R}^2$

Rovnice v  $\mathbb{R}^2$  (radiální proudění):

$$\phi \frac{\partial S}{\partial t} + \nabla \cdot (f(S)\vec{u} - D(S)\nabla S) = 0$$

- bez gravitace
- $D(S)$  funkce kapilární difúze
- konstantní vtláčení nesmáčivé fáze v  $\vec{0}$
- konstantní  $\vec{u}$  (v radiálním směru)

$$\|\vec{u}\| = A$$

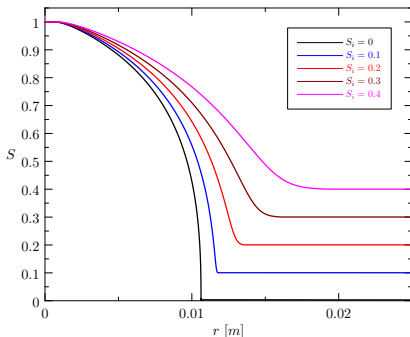
- počáteční podmínka:

$$S(0, \vec{x}) = S_i$$

- okrajové podmínky:

$$S(t, \vec{0}) = 1, \quad S(t, \infty) = S_i$$

Plot of  $S$ :  $d = 2$ ,  $S_i [-]$ ,  $A = 10^{-4} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ ,  $t = 1 \text{ s}$



Obrázek: Různé poč. saturace  $S_i$ .

# McWhorterovo a Sunadovo řešení v $\mathbb{R}^2$

Rovnice v  $\mathbb{R}^2$  (radiální proudění):

$$\phi \frac{\partial S}{\partial t} + \nabla \cdot (f(S)\vec{u} - D(S)\nabla S) = 0$$

- bez gravitace
- $D(S)$  funkce kapilární difúze
- konstantní vtláčení nesmáčivé fáze v  $\vec{0}$
- konstantní  $\vec{u}$  (v radiálním směru)

$$\|\vec{u}\| = A$$

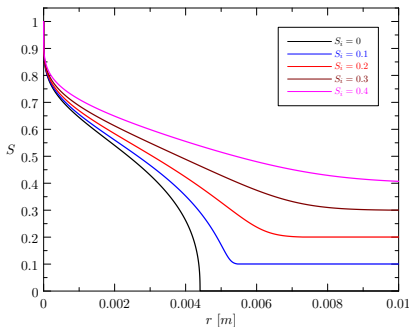
- počáteční podmínka:

$$S(0, \vec{x}) = S_i$$

- okrajové podmínky:

$$S(t, \vec{0}) = 1, \quad S(t, \infty) = S_i$$

Plot of  $S$ :  $d = 2$ ,  $S_i$  [-],  $A = 10^{-5} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ ,  $t = 1 \text{ s}$



Obrázek: Různé poč. saturace  $S_i$ .

# Přehled přesných řešení

Přesná řešení pro homogenní porézní prostředí:

1. S. E. **Buckley** a M. C. **Leverett** (1942)
2. D. B. **McWhorter** a D. K. **Sunada** (1990)
3. R. **Fučík**, T. H. **Illangasekare**, a M. **Beneš** (2016)

Přesná řešení pro heterogenní porézní prostředí:

4. C. J. **van Duijn** a M. J. **de Neef** (1996)
5. R. **Fučík**, J. **Mikyška**, M. **Beneš**, a T. H. **Illangasekare** (2008)

## Fučík, Illangasekare a Beneš (2016)

Rovnice radiálního proudění v obecném  $d$ -rozměrném prostoru:

$$\phi \frac{\partial S}{\partial t} + \nabla \cdot (f(S)\vec{u} - D(S)\nabla S) = 0$$

- bez gravitace
- dimenze  $d = 2, 3, 4, \dots$
- zobecnění McWhorterova a Sunadova řešení
- časová úměrnost vstupního toku:

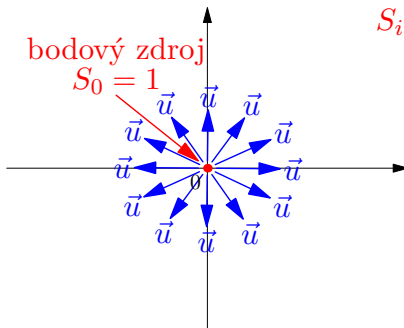
$$\|\vec{u}(t, \vec{0})\| \propto At^{\frac{d-2}{2}}$$

- počáteční podmínka:

$$S(0, \vec{x}) = S_i$$

- okrajové podmínky:

$$S(t, \vec{0}) = 1, \quad S(t, \infty) = S_i$$



Obrázek: Ukázka oblasti v  $\mathbb{R}^2$ .

## Fučík, Illangasekare a Beneš (2016)

Rovnice radiálního proudění v obecném  $d$ -rozměrném prostoru:

$$\phi \frac{\partial S}{\partial t} + \nabla \cdot (f(S)\vec{u} - D(S)\nabla S) = 0$$

- bez gravitace
- dimenze  $d = 2, 3, 4, \dots$
- zobecnění McWhorterova a Sunadova řešení
- časová úměrnost vstupního toku:

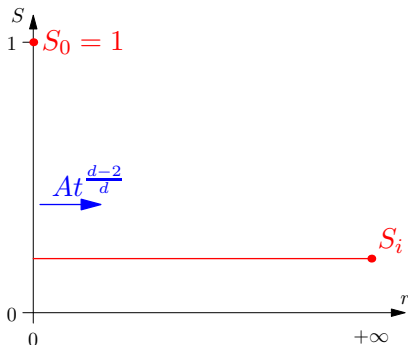
$$\|\vec{u}(t, \vec{0})\| \propto At^{\frac{d-2}{2}}$$

- počáteční podmínka:

$$S(0, \vec{x}) = S_i$$

- okrajové podmínky:

$$S(t, \vec{0}) = 1, \quad S(t, \infty) = S_i$$



Obrázek: Radiální souřadnice.

## Fučík, Illangasekare a Beneš (2016)

Rovnice radiálního proudění v obecném  $d$ -rozměrném prostoru:

$$\phi \frac{\partial S}{\partial t} + \nabla \cdot (f(S)\vec{u} - D(S)\nabla S) = 0$$

- bez gravitace
- dimenze  $d = 2, 3, 4, \dots$
- zobecnění McWhorterova a Sunadova řešení
- časová úměrnost vstupního toku:

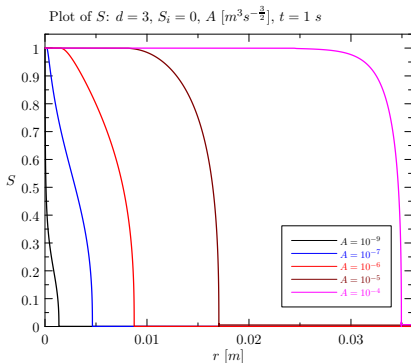
$$\|\vec{u}(t, \vec{0})\| \propto At^{\frac{d-2}{2}}$$

- počáteční podmínka:

$$S(0, \vec{x}) = S_i$$

- okrajové podmínky:

$$S(t, \vec{0}) = 1, \quad S(t, \infty) = S_i$$



Obrázek: Různé hodnoty  $A$ .

## Fučík, Illangasekare a Beneš (2016)

Rovnice radiálního proudění v obecném  $d$ -rozměrném prostoru:

$$\phi \frac{\partial S}{\partial t} + \nabla \cdot (f(S)\vec{u} - D(S)\nabla S) = 0$$

- bez gravitace
- dimenze  $d = 2, 3, 4, \dots$
- zobecnění McWhorterova a Sunadova řešení
- časová úměrnost vstupního toku:

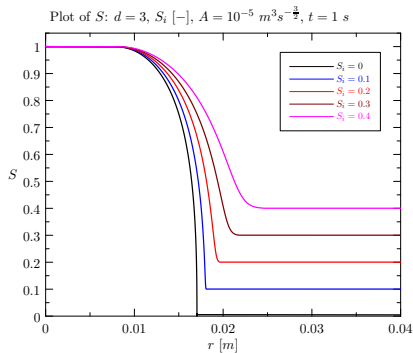
$$\|\vec{u}(t, \vec{0})\| \propto At^{\frac{d-2}{2}}$$

- počáteční podmínka:

$$S(0, \vec{x}) = S_i$$

- okrajové podmínky:

$$S(t, \vec{0}) = 1, \quad S(t, \infty) = S_i$$



Obrázek: Různé poč. saturace  $S_i$ .

# Fučík, Illangasekare a Beneš (2016)

Rovnice radiálního proudění v obecném  $d$ -rozměrném prostoru:

$$\phi \frac{\partial S}{\partial t} + \nabla \cdot (f(S)\vec{u} - D(S)\nabla S) = 0$$

- bez gravitace
- dimenze  $d = 2, 3, 4, \dots$
- zobecnění McWhorterova a Sunadova řešení
- časová úměrnost vstupního toku:

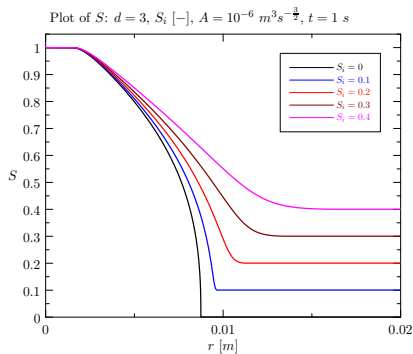
$$\|\vec{u}(t, \vec{0})\| \propto At^{\frac{d-2}{2}}$$

- počáteční podmínka:

$$S(0, \vec{x}) = S_i$$

- okrajové podmínky:

$$S(t, \vec{0}) = 1, \quad S(t, \infty) = S_i$$



Obrázek: Různé poč. saturace  $S_i$ .



## Fučík, Illangasekare a Beneš (2016)

Rovnice radiálního proudění v obecném  $d$ -rozměrném prostoru:

$$\phi \frac{\partial S}{\partial t} + \nabla \cdot (f(S)\vec{u} - D(S)\nabla S) = 0$$

- bez gravitace
- dimenze  $d = 2, 3, 4, \dots$
- zobecnění McWhorterova a Sunadova řešení
- časová úměrnost vstupního toku:

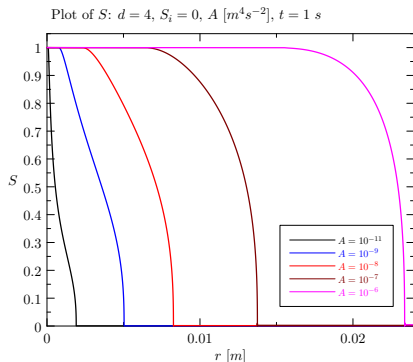
$$\|\vec{u}(t, \vec{0})\| \propto At^{\frac{d-2}{2}}$$

- počáteční podmínka:

$$S(0, \vec{x}) = S_i$$

- okrajové podmínky:

$$S(t, \vec{0}) = 1, \quad S(t, \infty) = S_i$$



Obrázek: Různé injection rates  $A$ .

# Fučík, Illangasekare a Beneš (2016)

Rovnice radiálního proudění v obecném  $d$ -rozměrném prostoru:

$$\phi \frac{\partial S}{\partial t} + \nabla \cdot (f(S)\vec{u} - D(S)\nabla S) = 0$$

- bez gravitace
- dimenze  $d = 2, 3, 4, \dots$
- zobecnění McWhorterova a Sunadova řešení
- časová úměrnost vstupního toku:

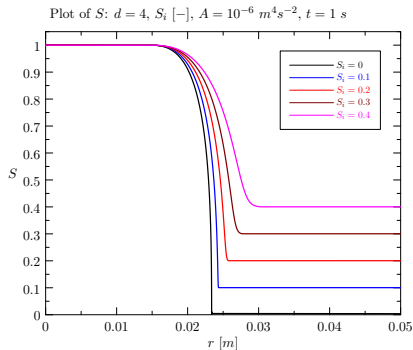
$$\|\vec{u}(t, \vec{0})\| \propto At^{\frac{d-2}{2}}$$

- počáteční podmínka:

$$S(0, \vec{x}) = S_i$$

- okrajové podmínky:

$$S(t, \vec{0}) = 1, \quad S(t, \infty) = S_i$$



Obrázek: Různé poč. saturace  $S_i$ .

# Fučík, Illangasekare a Beneš (2016)

Rovnice radiálního proudění v obecném  $d$ -rozměrném prostoru:

$$\phi \frac{\partial S}{\partial t} + \nabla \cdot (f(S)\vec{u} - D(S)\nabla S) = 0$$

- bez gravitace
- dimenze  $d = 2, 3, 4, \dots$
- zobecnění McWhorterova a Sunadova řešení
- časová úměrnost vstupního toku:

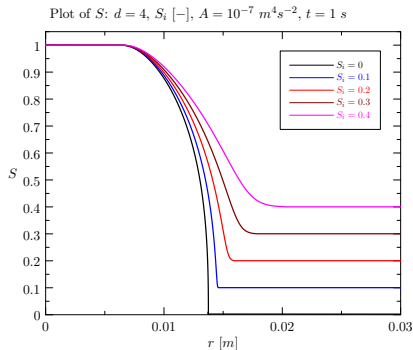
$$\|\vec{u}(t, \vec{0})\| \propto At^{\frac{d-2}{2}}$$

- počáteční podmínka:

$$S(0, \vec{x}) = S_i$$

- okrajové podmínky:

$$S(t, \vec{0}) = 1, \quad S(t, \infty) = S_i$$



Obrázek: Různé poč. saturace  $S_i$ .

# Přehled přesných řešení

Přesná řešení pro homogenní porézní prostředí:

1. S. E. **Buckley** a M. C. **Leverett** (1942)
2. D. B. **McWhorter** a D. K. **Sunada** (1990)
3. R. **Fučík**, T. H. **Illangasekare**, a M. **Beneš** (2016)

Přesná řešení pro heterogenní porézní prostředí:

4. C. J. **van Duijn** a M. J. **de Neef** (1996)
5. R. **Fučík**, J. **Mikyška**, M. **Beneš**, a T. H. **Illangasekare** (2008)

# van Duijnovo a de Neefovo přesné řešení

Rovnice v heterogenním porézním prostředí v  $\mathbb{R}^1$ :

$$\phi \frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( D(S) \frac{\partial S}{\partial x} \right)$$

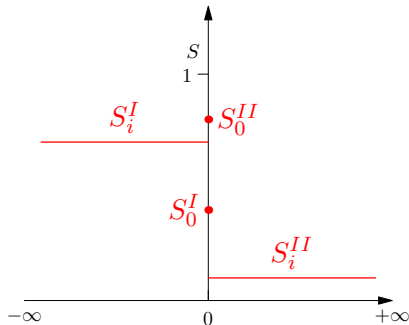
- bez gravitace, bez advekce
- materiálová nespojitost v  $x = 0$
- $D(S)$  funkce kapilární difúze
- počáteční podmínky:

$$S(0, x) = S_i^I, \quad \text{pro } x < 0$$

$$S(0, x) = S_i^{II}, \quad \text{pro } x > 0$$

- okrajové podmínky:

$$S(t, -\infty) = S_i^I, \quad S(t, +\infty) = S_i^{II}$$



# van Duijnovo a de Neefovo přesné řešení

Rovnice v heterogenním porézním prostředí v  $\mathbb{R}^1$ :

$$\phi \frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( D(S) \frac{\partial S}{\partial x} \right)$$

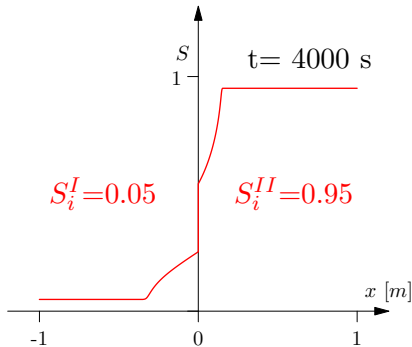
- bez gravitace, bez advekce
- materiálová nespojitost v  $x = 0$
- $D(S)$  funkce kapilární difúze
- počáteční podmínky:

$$S(0, x) = S_i^I, \quad \text{pro } x < 0$$

$$S(0, x) = S_i^{II}, \quad \text{pro } x > 0$$

- okrajové podmínky:

$$S(t, -\infty) = S_i^I, \quad S(t, +\infty) = S_i^{II}$$



# Přehled přesných řešení

Přesná řešení pro homogenní porézní prostředí:

1. S. E. **Buckley** a M. C. **Leverett** (1942)
2. D. B. **McWhorter** a D. K. **Sunada** (1990)
3. R. **Fučík**, T. H. **Illangasekare**, a M. **Beneš** (2016)

Přesná řešení pro heterogenní porézní prostředí:

4. C. J. **van Duijn** a M. J. **de Neef** (1996)
5. R. **Fučík**, J. **Mikyška**, M. **Beneš**, a T. H. **Illangasekare** (2008)

# Fučík, Mikyška, Beneš, Illangasekare (2008)

Rovnice v heterogenním porézním prostředí v  $\mathbb{R}^1$ :

$$\phi \frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial f(S)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( D(S) \frac{\partial S}{\partial x} \right)$$

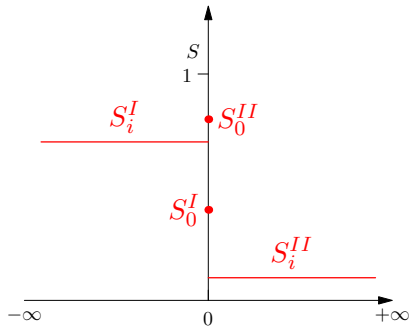
- bez gravitace
- materiálová nespojitost v  $x = 0$
- $D(S)$  funkce kapilární difúze
- $u \propto Rt^{-\frac{1}{2}}$ ,  $R \in (-\infty, 1)$
- počáteční podmínky:

$$S(0, x) = S_i^I, \quad \text{for } x < 0$$

$$S(0, x) = S_i^{II}, \quad \text{for } x > 0$$

- okrajové podmínky:

$$S(t, -\infty) = S_i^I, \quad S(t, +\infty) = S_i^{II}$$





# Fučík, Mikyška, Beneš, Illangasekare (2008)

Rovnice v heterogenním porézním prostředí v  $\mathbb{R}^1$ :

$$\phi \frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial f(S)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( D(S) \frac{\partial S}{\partial x} \right)$$

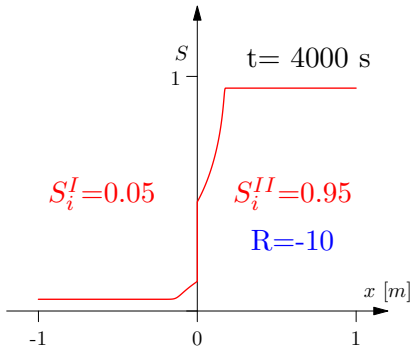
- bez gravitace
- materiálová nespojitost v  $x = 0$
- $D(S)$  funkce kapilární difúze
- $u \propto Rt^{-\frac{1}{2}}$ ,  $R \in (-\infty, 1)$
- počáteční podmínky:

$$S(0, x) = S_i^I, \quad \text{for } x < 0$$

$$S(0, x) = S_i^{II}, \quad \text{for } x > 0$$

- okrajové podmínky:

$$S(t, -\infty) = S_i^I, \quad S(t, +\infty) = S_i^{II}$$



# Fučík, Mikyška, Beneš, Illangasekare (2008)

Rovnice v heterogenním porézním prostředí v  $\mathbb{R}^1$ :

$$\phi \frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial f(S)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( D(S) \frac{\partial S}{\partial x} \right)$$

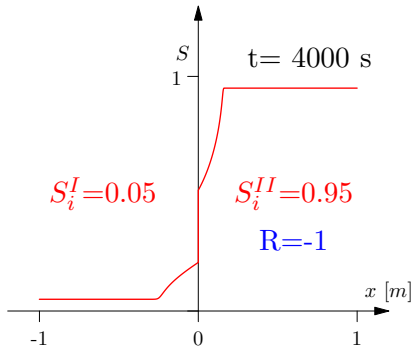
- bez gravitace
- materiálová nespojitost v  $x = 0$
- $D(S)$  funkce kapilární difúze
- $u \propto Rt^{-\frac{1}{2}}$ ,  $R \in (-\infty, 1)$
- počáteční podmínky:

$$S(0, x) = S_i^I, \quad \text{for } x < 0$$

$$S(0, x) = S_i^{II}, \quad \text{for } x > 0$$

- okrajové podmínky:

$$S(t, -\infty) = S_i^I, \quad S(t, +\infty) = S_i^{II}$$



# Fučík, Mikyška, Beneš, Illangasekare (2008)

Rovnice v heterogenním porézním prostředí v  $\mathbb{R}^1$ :

$$\phi \frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial f(S)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( D(S) \frac{\partial S}{\partial x} \right)$$

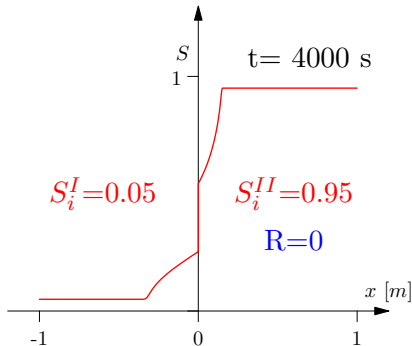
- bez gravitace
- materiálová nespojitost v  $x = 0$
- $D(S)$  funkce kapilární difúze
- $u \propto Rt^{-\frac{1}{2}}$ ,  $R \in (-\infty, 1)$
- počáteční podmínky:

$$S(0, x) = S_i^I, \quad \text{for } x < 0$$

$$S(0, x) = S_i^{II}, \quad \text{for } x > 0$$

- okrajové podmínky:

$$S(t, -\infty) = S_i^I, \quad S(t, +\infty) = S_i^{II}$$



# Fučík, Mikyška, Beneš, Illangasekare (2008)

Rovnice v heterogenním porézním prostředí v  $\mathbb{R}^1$ :

$$\phi \frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial f(S)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( D(S) \frac{\partial S}{\partial x} \right)$$

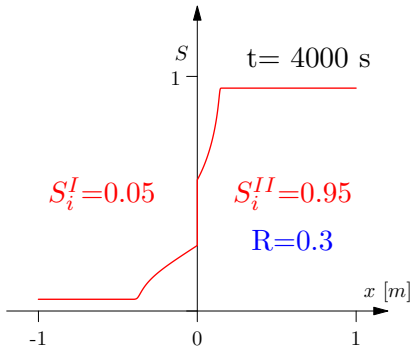
- bez gravitace
- materiálová nespojitost v  $x = 0$
- $D(S)$  funkce kapilární difúze
- $u \propto Rt^{-\frac{1}{2}}$ ,  $R \in (-\infty, 1)$
- počáteční podmínky:

$$S(0, x) = S_i^I, \quad \text{for } x < 0$$

$$S(0, x) = S_i^{II}, \quad \text{for } x > 0$$

- okrajové podmínky:

$$S(t, -\infty) = S_i^I, \quad S(t, +\infty) = S_i^{II}$$



# Fučík, Mikyška, Beneš, Illangasekare (2008)

Rovnice v heterogenním porézním prostředí v  $\mathbb{R}^1$ :

$$\phi \frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial f(S)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( D(S) \frac{\partial S}{\partial x} \right)$$

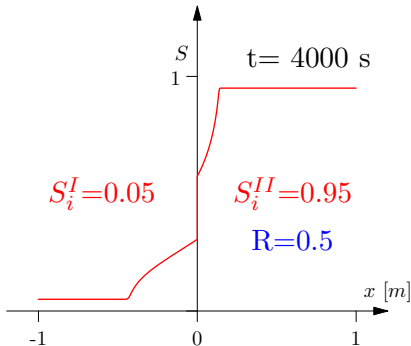
- bez gravitace
- materiálová nespojitost v  $x = 0$
- $D(S)$  funkce kapilární difúze
- $u \propto Rt^{-\frac{1}{2}}$ ,  $R \in (-\infty, 1)$
- počáteční podmínky:

$$S(0, x) = S_i^I, \quad \text{for } x < 0$$

$$S(0, x) = S_i^{II}, \quad \text{for } x > 0$$

- okrajové podmínky:

$$S(t, -\infty) = S_i^I, \quad S(t, +\infty) = S_i^{II}$$



# Fučík, Mikyška, Beneš, Illangasekare (2008)

Rovnice v heterogenním porézním prostředí v  $\mathbb{R}^1$ :

$$\phi \frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial f(S)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( D(S) \frac{\partial S}{\partial x} \right)$$

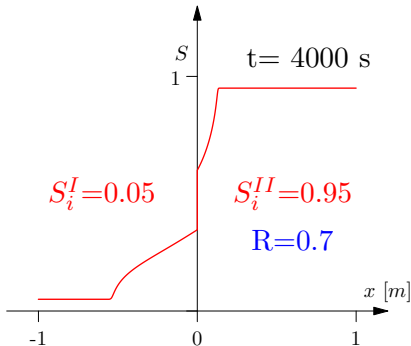
- bez gravitace
- materiálová nespojitost v  $x = 0$
- $D(S)$  funkce kapilární difúze
- $u \propto Rt^{-\frac{1}{2}}$ ,  $R \in (-\infty, 1)$
- počáteční podmínky:

$$S(0, x) = S_i^I, \quad \text{for } x < 0$$

$$S(0, x) = S_i^{II}, \quad \text{for } x > 0$$

- okrajové podmínky:

$$S(t, -\infty) = S_i^I, \quad S(t, +\infty) = S_i^{II}$$



# Fučík, Mikyška, Beneš, Illangasekare (2008)

Rovnice v heterogenním porézním prostředí v  $\mathbb{R}^1$ :

$$\phi \frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial f(S)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( D(S) \frac{\partial S}{\partial x} \right)$$

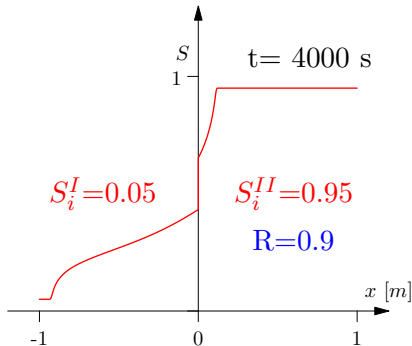
- bez gravitace
- materiálová nespojitost v  $x = 0$
- $D(S)$  funkce kapilární difúze
- $u \propto Rt^{-\frac{1}{2}}$ ,  $R \in (-\infty, 1)$
- počáteční podmínky:

$$S(0, x) = S_i^I, \quad \text{for } x < 0$$

$$S(0, x) = S_i^{II}, \quad \text{for } x > 0$$

- okrajové podmínky:

$$S(t, -\infty) = S_i^I, \quad S(t, +\infty) = S_i^{II}$$



# Obsah

Matematické modelování

Proudění v porézním prostředí

Ukázková úloha dvoufázového proudění

Přehled přesných řešení

Přesné řešení v  $\mathbb{R}^d$  (a úkol pro SSM)

Pachatelé



# Rovnice dvoufázového proudění v $\mathbb{R}^d$ (opět)

- Rovnice kontinuity pro fázi  $\alpha = w, n$ :

$$\frac{\partial(\phi\rho_\alpha S_\alpha)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_\alpha \vec{v}_\alpha) = F_\alpha$$

- Darcyho zákon fázi  $\alpha = w, n$ :

$$\vec{v}_\alpha = -\lambda_\alpha \mathbf{K}(\nabla p_\alpha - \rho_\alpha \vec{g})$$

- Bilance saturace

$$S_w + S_n = 1$$

- Kapilární tlak

$$p_c = p_n - p_w = p_c(S_w)$$

# Rovnice dvoufázového proudění v $\mathbb{R}^d$ (opět)

- Rovnice kontinuity pro fázi  $\alpha = w, n$ :

$$\frac{\partial(\phi\rho_\alpha S_\alpha)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_\alpha \vec{v}_\alpha) = F_\alpha$$

- Darcyho zákon fázi  $\alpha = w, n$ :

$$\vec{v}_\alpha = -\lambda_\alpha \mathbf{K}(\nabla p_\alpha - \rho_\alpha \vec{g})$$

- Bilance saturace

$$S_w + S_n = 1$$

- Kapilární tlak

$$p_c = p_n - p_w = p_c(S_w)$$

---

**Úkol:** Z těchto rovnic odvoďte rovnice v  $\mathbb{R}^d$ :

$$\phi \frac{\partial S_w}{\partial t} + \nabla \cdot (f(S_w) \vec{v}_T - D(S_w) \nabla S_w) = 0,$$

$$\nabla \cdot \vec{v}_T = 0.$$

## Formulace úlohy v $\mathbb{R}^d$

**Úkol:** Odvoďte rovnice v  $\mathbb{R}^d$ :

$$\phi \frac{\partial S_w}{\partial t} + \nabla \cdot (f(S_w) \vec{v}_T - D(S_w) \nabla S_w) = 0,$$
$$\nabla \cdot \vec{v}_T = 0.$$

Stáhněte si tuto prezentaci zde:

<http://mmg.fjfi.cvut.cz/~fucik/ssm>

## Formulace úlohy v $\mathbb{R}^d$

**Úkol:** Odvoďte rovnice v  $\mathbb{R}^d$ :

$$\phi \frac{\partial S_w}{\partial t} + \nabla \cdot (f(S_w) \vec{v}_T - D(S_w) \nabla S_w) = 0,$$
$$\nabla \cdot \vec{v}_T = 0.$$

Stáhněte si tuto prezentaci zde:

<http://mmg.fjfi.cvut.cz/~fucik/ssm>

---

Poznámky:

## Formulace úlohy v $\mathbb{R}^d$

**Úkol:** Odvoďte rovnice v  $\mathbb{R}^d$ :

$$\phi \frac{\partial S_w}{\partial t} + \nabla \cdot (f(S_w) \vec{v}_T - D(S_w) \nabla S_w) = 0,$$
$$\nabla \cdot \vec{v}_T = 0.$$

Stáhněte si tuto prezentaci zde:

<http://mmg.fjfi.cvut.cz/~fucik/ssm>

---

Poznámky:

- bez gravitace:  $\vec{g} = \vec{0}$

## Formulace úlohy v $\mathbb{R}^d$

**Úkol:** Odvoďte rovnice v  $\mathbb{R}^d$ :

$$\phi \frac{\partial S_w}{\partial t} + \nabla \cdot (f(S_w) \vec{v}_T - D(S_w) \nabla S_w) = 0,$$
$$\nabla \cdot \vec{v}_T = 0.$$

Stáhněte si tuto prezentaci zde:

<http://mmg.fjfi.cvut.cz/~fucik/ssm>

---

Poznámky:

- bez gravitace:  $\vec{g} = \vec{0}$
- nestlačitelné:  $\rho_\alpha = \text{konst}$

## Formulace úlohy v $\mathbb{R}^d$

**Úkol:** Odvoďte rovnice v  $\mathbb{R}^d$ :

$$\phi \frac{\partial S_w}{\partial t} + \nabla \cdot (f(S_w) \vec{v}_T - D(S_w) \nabla S_w) = 0,$$
$$\nabla \cdot \vec{v}_T = 0.$$

Stáhněte si tuto prezentaci zde:

<http://mmg.fjfi.cvut.cz/~fucik/ssm>

---

Poznámky:

- bez gravitace:  $\vec{g} = \vec{0}$
- nestlačitelné:  $\rho_\alpha = \text{konst}$
- totální rychlost:  $\vec{v}_T = \vec{v}_w + \vec{v}_n$

## Formulace úlohy v $\mathbb{R}^d$

**Úkol:** Odvoďte rovnice v  $\mathbb{R}^d$ :

$$\phi \frac{\partial S_w}{\partial t} + \nabla \cdot (f(S_w) \vec{v}_T - D(S_w) \nabla S_w) = 0,$$
$$\nabla \cdot \vec{v}_T = 0.$$

Stáhněte si tuto prezentaci zde:

<http://mmg.fjfi.cvut.cz/~fucik/ssm>

---

Poznámky:

- bez gravitace:  $\vec{g} = \vec{0}$
- nestlačitelné:  $\rho_\alpha = \text{konst}$
- totální rychlost:  $\vec{v}_T = \vec{v}_w + \vec{v}_n$
- izotropní prostředí:  $\mathbf{K} = KI$



## Formulace úlohy v $\mathbb{R}^d$

**Úkol:** Odvoďte rovnice v  $\mathbb{R}^d$ :

$$\phi \frac{\partial S_w}{\partial t} + \nabla \cdot (f(S_w) \vec{v}_T - D(S_w) \nabla S_w) = 0,$$
$$\nabla \cdot \vec{v}_T = 0.$$

Stáhněte si tuto prezentaci zde:

<http://mmg.fjfi.cvut.cz/~fucik/ssm>

---

Poznámky:

- bez gravitace:  $\vec{g} = \vec{0}$
- nestlačitelné:  $\rho_\alpha = \text{konst}$
- totální rychlost:  $\vec{v}_T = \vec{v}_w + \vec{v}_n$
- izotropní prostředí:  $\mathbf{K} = KI$
- frakční toková funkce:  $f = \frac{\lambda_w}{\lambda_w + \lambda_n}$

## Formulace úlohy v $\mathbb{R}^d$

**Úkol:** Odvoďte rovnice v  $\mathbb{R}^d$ :

$$\phi \frac{\partial S_w}{\partial t} + \nabla \cdot (f(S_w) \vec{v}_T - D(S_w) \nabla S_w) = 0,$$
$$\nabla \cdot \vec{v}_T = 0.$$

Stáhněte si tuto prezentaci zde:

<http://mmg.fjfi.cvut.cz/~fucik/ssm>

---

Poznámky:

- bez gravitace:  $\vec{g} = \vec{0}$
- nestlačitelné:  $\rho_\alpha = \text{konst}$
- totální rychlost:  $\vec{v}_T = \vec{v}_w + \vec{v}_n$
- izotropní prostředí:  $\mathbf{K} = KI$
- frakční toková funkce:  $f = \frac{\lambda_w}{\lambda_w + \lambda_n}$
- funkce kapilární difúze:  $D = -K \frac{\lambda_w \lambda_n}{\lambda_w + \lambda_n} \frac{dp_c}{dS_w}$

## Sférická transformace rovnic v $\mathbb{R}^d$ : 1/3

Rovnice

$$\phi \frac{\partial S_w}{\partial t} + \nabla \cdot (f(S_w) \vec{v}_T - D(S_w) \nabla S_w) = 0,$$
$$\nabla \cdot \vec{v}_T = 0,$$

za předpokladu symetrie řešení dle počátku  $\vec{0}$ :

$$S_w = S_w(t, r), \quad \vec{v}_T = \vec{v}_T(t, r),$$

transformujeme do obecných sférických souřadnicích v  $\mathbb{R}^d$

## Sférická transformace rovnic v $\mathbb{R}^d$ : 1/3

Rovnice

$$\phi \frac{\partial S_w}{\partial t} + \nabla \cdot (f(S_w) \vec{v}_T - D(S_w) \nabla S_w) = 0,$$
$$\nabla \cdot \vec{v}_T = 0,$$

za předpokladu symetrie řešení dle počátku  $\vec{0}$ :

$$S_w = S_w(t, r), \quad \vec{v}_T = \vec{v}_T(t, r),$$

transformujeme do obecných sférických souřadnicích v  $\mathbb{R}^d$

(viz cvičení MAA4)

## Sférická transformace rovnic v $\mathbb{R}^d$ : 1/3

Rovnice

$$\phi \frac{\partial S_w}{\partial t} + \nabla \cdot (f(S_w) \vec{v}_T - D(S_w) \nabla S_w) = 0,$$
$$\nabla \cdot \vec{v}_T = 0,$$

za předpokladu symetrie řešení dle počátku  $\vec{0}$ :

$$S_w = S_w(t, r), \quad \vec{v}_T = \vec{v}_T(t, r),$$

transformujeme do obecných sférických souřadnicích v  $\mathbb{R}^d$

(viz cvičení MAA4)

Okrajové podmínky:

$$S_w(t, 0) = 1, \quad S_w(t, +\infty) = S_i.$$

## Sférická transformace rovnic v $\mathbb{R}^d$ : 1/3

Rovnice

$$\phi \frac{\partial S_w}{\partial t} + \nabla \cdot (f(S_w) \vec{v}_T - D(S_w) \nabla S_w) = 0,$$
$$\nabla \cdot \vec{v}_T = 0,$$

za předpokladu symetrie řešení dle počátku  $\vec{0}$ :

$$S_w = S_w(t, r), \quad \vec{v}_T = \vec{v}_T(t, r),$$

transformujeme do obecných sférických souřadnicích v  $\mathbb{R}^d$

(viz cvičení MAA4)

Okrajové podmínky:

$$S_w(t, 0) = 1, \quad S_w(t, +\infty) = S_i.$$

Počáteční podmínka:

$$S_w(0, r) = S_i.$$

# Sférická transformace rovnic v $\mathbb{R}^d$ : 2/3

Řešení rovnice

$$\nabla \cdot \vec{v}_T = 0,$$

## Sférická transformace rovnic v $\mathbb{R}^d$ : 2/3

Řešení rovnice

$$\nabla \cdot \vec{v}_T = 0,$$

ve sférických souřadnicích lze najít ve tvaru

$$\vec{v}_T(t, r) = \frac{Q_0(t)}{\gamma_d r^{d-1}} \vec{e}_r,$$



## Sférická transformace rovnic v $\mathbb{R}^d$ : 2/3

Řešení rovnice

$$\nabla \cdot \vec{v}_T = 0,$$

ve sférických souřadnicích lze najít ve tvaru

$$\vec{v}_T(t, r) = \frac{Q_0(t)}{\gamma_d r^{d-1}} \vec{e}_r,$$

kde

- $Q_0$  je koeficient rychlosti vtoku

## Sférická transformace rovnic v $\mathbb{R}^d$ : 2/3

Řešení rovnice

$$\nabla \cdot \vec{v}_T = 0,$$

ve sférických souřadnicích lze najít ve tvaru

$$\vec{v}_T(t, r) = \frac{Q_0(t)}{\gamma_d r^{d-1}} \vec{e},$$

kde

- $Q_0$  je koeficient rychlosti vtoku
- $\gamma_d \dots$  povrch jednotkové koule v  $\mathbb{R}^d$ :

$$\gamma_d = \frac{d\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma\left(\frac{d}{2} + 1\right)}$$

## Sférická transformace rovnic v $\mathbb{R}^d$ : 2/3

Řešení rovnice

$$\nabla \cdot \vec{v}_T = 0,$$

ve sférických souřadnicích lze najít ve tvaru

$$\vec{v}_T(t, r) = \frac{Q_0(t)}{\gamma_d r^{d-1}} \vec{t},$$

kde

- $Q_0$  je koeficient rychlosti vtoku
- $\gamma_d \dots$  povrch jednotkové koule v  $\mathbb{R}^d$ :

$$\gamma_d = \frac{d\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma\left(\frac{d}{2} + 1\right)}$$

- $\vec{t} \dots$  jednotkový vektor v kladném radiálním směru

## Sférická transformace rovnic v $\mathbb{R}^d$ : 3/3

Hlavní rovnice pro  $S_w = S_w(t, r)$ :

$$\gamma_d r^{d-1} \phi \frac{\partial S_w}{\partial t} + (1 - f(S_i)) Q_0 \frac{\partial F}{\partial r} = 0$$

## Sférická transformace rovnic v $\mathbb{R}^d$ : 3/3

Hlavní rovnice pro  $S_w = S_w(t, r)$ :

$$\gamma_d r^{d-1} \phi \frac{\partial S_w}{\partial t} + (1 - f(S_i)) Q_0 \frac{\partial F}{\partial r} = 0$$

- funkce  $F = F(t, r)$

$$F = \frac{\frac{Q_w}{Q_0} - f(S_i)}{1 - f(S_i)}$$

## Sférická transformace rovnic v $\mathbb{R}^d$ : 3/3

Hlavní rovnice pro  $S_w = S_w(t, r)$ :

$$\gamma_d r^{d-1} \phi \frac{\partial S_w}{\partial t} + (1 - f(S_i)) Q_0 \frac{\partial F}{\partial r} = 0$$

- funkce  $F = F(t, r)$

$$F = \frac{\frac{Q_w}{Q_0} - f(S_i)}{1 - f(S_i)}$$

- funkce  $Q_w = Q_w(t, r)$ :

$$Q_w = \gamma_d r^{d-1} v_w$$

## Sférická transformace rovnic v $\mathbb{R}^d$ : 3/3

Hlavní rovnice pro  $S_w = S_w(t, r)$ :

$$\gamma_d r^{d-1} \phi \frac{\partial S_w}{\partial t} + (1 - f(S_i)) Q_0 \frac{\partial F}{\partial r} = 0$$

- funkce  $F = F(t, r)$

$$F = \frac{\frac{Q_w}{Q_0} - f(S_i)}{1 - f(S_i)}$$

- funkce  $Q_w = Q_w(t, r)$ :

$$Q_w = \gamma_d r^{d-1} v_w$$

- funkce  $F_w = F_w(S_w) \dots$  normalizovaná funkce  $f$ :

$$F_w(S_w) = \frac{f(S_w) - f(S_i)}{1 - f(S_i)}$$

## Sférická transformace rovnic v $\mathbb{R}^d$ : 3/3

Hlavní rovnice pro  $S_w = S_w(t, r)$ :

$$\gamma_d r^{d-1} \phi \frac{\partial S_w}{\partial t} + (1 - f(S_i)) Q_0 \frac{\partial F}{\partial r} = 0$$

- funkce  $F = F(t, r)$

$$F = \frac{\frac{Q_w}{Q_0} - f(S_i)}{1 - f(S_i)}$$

- funkce  $Q_w = Q_w(t, r)$ :

$$Q_w = \gamma_d r^{d-1} v_w$$

- funkce  $F_w = F_w(S_w) \dots$  normalizovaná funkce  $f$ :

$$F_w(S_w) = \frac{f(S_w) - f(S_i)}{1 - f(S_i)}$$



## Sférická transformace rovnic v $\mathbb{R}^d$ : 3/3

Hlavní rovnice pro  $S_w = S_w(t, r)$ :

$$\gamma_d r^{d-1} \phi \frac{\partial S_w}{\partial t} + (1 - f(S_i)) Q_0 \frac{\partial F}{\partial r} = 0$$

- funkce  $F = F(t, r)$

$$F = \frac{\frac{Q_w}{Q_0} - f(S_i)}{1 - f(S_i)} = F_w - \frac{\gamma_d r^{d-1}}{(1 - f(S_i)) Q_0} D \frac{\partial S_w}{\partial r}$$

- funkce  $Q_w = Q_w(t, r)$ :

$$Q_w = \gamma_d r^{d-1} v_w$$

- funkce  $F_w = F_w(S_w)$  ... normalizovaná funkce  $f$ :

$$F_w(S_w) = \frac{f(S_w) - f(S_i)}{1 - f(S_i)}$$

## Sférická transformace rovnic v $\mathbb{R}^d$ : 3/3

Hlavní rovnice pro  $S_w = S_w(t, r)$ :

$$\gamma_d r^{d-1} \phi \frac{\partial S_w}{\partial t} + (1 - f(S_i)) Q_0 \frac{\partial F}{\partial r} = 0$$

- funkce  $F = F(t, r)$

$$F = \frac{Q_w - f(S_i)}{1 - f(S_i)} = F_w - \frac{\gamma_d r^{d-1}}{(1 - f(S_i)) Q_0} D \frac{\partial S_w}{\partial r}$$

- funkce  $Q_w = Q_w(t, r)$ :

$$Q_w = \gamma_d r^{d-1} v_w = f Q_0 - \gamma_d r^{d-1} D \frac{\partial S_w}{\partial r},$$

- funkce  $F_w = F_w(S_w)$  ... normalizovaná funkce  $f$ :

$$F_w(S_w) = \frac{f(S_w) - f(S_i)}{1 - f(S_i)}$$

# Soběpodobná transformace proměnných

Hlavní rovnice pro  $S_w = S_w(t, r)$ :

$$\gamma_d r^{d-1} \phi \frac{\partial S_w(t, r)}{\partial t} + (1 - f(S_i)) Q_0(t) \frac{\partial F(t, r)}{\partial r} = 0. \quad (1)$$

# Soběpodobná transformace proměnných

Hlavní rovnice pro  $S_w = S_w(t, r)$ :

$$\gamma_d r^{d-1} \phi \frac{\partial S_w(t, r)}{\partial t} + (1 - f(S_i)) Q_0(t) \frac{\partial F(t, r)}{\partial r} = 0. \quad (1)$$

Pokud

$$Q_0(t) = At^{\frac{d-2}{2}},$$

# Soběpodobná transformace proměnných

Hlavní rovnice pro  $S_w = S_w(t, r)$ :

$$\gamma_d r^{d-1} \phi \frac{\partial S_w(t, r)}{\partial t} + (1 - f(S_i)) Q_0(t) \frac{\partial F(t, r)}{\partial r} = 0. \quad (1)$$

Pokud

$$Q_0(t) = At^{\frac{d-2}{2}},$$

Ize pomocí transformace proměnných  $\lambda(S_w) = rt^{-\frac{1}{2}}$  převést rovnici (1) na obyčejnou diferenciální rovnici pro  $F = F(S_w)$

$$F'' (F')^{\frac{2}{d}-2} = -A^{-\frac{2}{d}} \frac{C_d D}{F - F_w}$$

## Soběpodobná transformace proměnných

Hlavní rovnice pro  $S_w = S_w(t, r)$ :

$$\gamma_d r^{d-1} \phi \frac{\partial S_w(t, r)}{\partial t} + (1 - f(S_i)) Q_0(t) \frac{\partial F(t, r)}{\partial r} = 0. \quad (1)$$

Pokud

$$Q_0(t) = At^{\frac{d-2}{2}},$$

lze pomocí transformace proměnných  $\lambda(S_w) = rt^{-\frac{1}{2}}$  převést rovnici (1) na obyčejnou diferenciální rovnici pro  $F = F(S_w)$

$$F''' (F')^{\frac{2}{d}-2} = -A^{-\frac{2}{d}} \frac{C_d D}{F - F_w}$$

s okrajovými podmínkami

$$F(S_i) = 0, \quad F(S_0) = 1.$$

# Soběpodobná transformace proměnných

Hlavní rovnice pro  $S_w = S_w(t, r)$ :

$$\gamma_d r^{d-1} \phi \frac{\partial S_w(t, r)}{\partial t} + (1 - f(S_i)) Q_0(t) \frac{\partial F(t, r)}{\partial r} = 0. \quad (1)$$

Pokud

$$Q_0(t) = A t^{\frac{d-2}{2}},$$

lze pomocí transformace proměnných  $\lambda(S_w) = r t^{-\frac{1}{2}}$  převést rovnici (1) na obyčejnou diferenciální rovnici pro  $F = F(S_w)$

$$F'' (F')^{\frac{2}{d}-2} = -A^{-\frac{2}{d}} \frac{C_d D}{F - F_w}$$

s okrajovými podmínkami

$$F(S_i) = 0,$$

$$F(S_0) = 1.$$

- $C_d = d \left( \frac{\gamma_d}{1-f(S_i)} \right)^{\frac{2}{d}} \left( \frac{\phi}{2} \right)^{\frac{2}{d}-1} \dots$  konstanta.

# Integrální řešení: 1/2

Integrální řešení obyčejné diferenciální rovnice

$$F'' (F')^{\frac{2}{d}-2} = -A^{-\frac{2}{d}} \frac{C_d D}{F - F_w}$$



# Integrální řešení: 1/2

Integrální řešení obyčejné diferenciální rovnice

$$F'' (F')^{\frac{2}{d}-2} = -A^{-\frac{2}{d}} \frac{C_d D}{F - F_w}$$

- pro  $d = 1$  a  $d = 2$ : McWhorter a Sunada (1990), Fučík et al. (2007)

# Integrální řešení: 1/2

Integrální řešení obyčejné diferenciální rovnice

$$F'' (F')^{\frac{2}{d}-2} = -A^{-\frac{2}{d}} \frac{C_d D}{F - F_w}$$

- pro  $d = 1$  a  $d = 2$ : McWhorter a Sunada (1990), Fučík et al. (2007)
- pro  $d \geq 3$ : Fučík, Illangasekare a Beneš (2016):

# Integrální řešení: 1/2

Integrální řešení obyčejné diferenciální rovnice

$$F'' (F')^{\frac{2}{d}-2} = -A^{-\frac{2}{d}} \frac{C_d D}{F - F_w}$$

- pro  $d = 1$  a  $d = 2$ : McWhorter a Sunada (1990), Fučík et al. (2007)
- pro  $d \geq 3$ : Fučík, Illangasekare a Beneš (2016):

$$F(S_w) = \int_{S_i}^{S_w} \left[ (F'(S_i^+))^{\frac{2-d}{d}} + \frac{d-2}{d} C_d A^{-\frac{2}{d}} \int_{S_i}^{\beta} \frac{D(\eta)}{F(\eta) - F_w(\eta)} d\eta \right]^{\frac{d}{2-d}} d\beta,$$

# Integrální řešení: 1/2

Integrální řešení obyčejné diferenciální rovnice

$$F'' (F')^{\frac{2}{d}-2} = -A^{-\frac{2}{d}} \frac{C_d D}{F - F_w}$$

- pro  $d = 1$  a  $d = 2$ : McWhorter a Sunada (1990), Fučík et al. (2007)
- pro  $d \geq 3$ : Fučík, Illangasekare a Beneš (2016):

$$F(S_w) = \int_{S_i}^{S_w} \left[ (F'(S_i^+))^{\frac{2-d}{d}} + \frac{d-2}{d} C_d A^{-\frac{2}{d}} \int_{S_i}^{\beta} \frac{D(\eta)}{F(\eta) - F_w(\eta)} d\eta \right]^{\frac{d}{2-d}} d\beta,$$

s podmínkou/rovnicí pro neznámou hodnotu  $F'(S_i^+)$ :

$$1 = \int_{S_i}^{S_0} \left[ (F'(S_i^+))^{\frac{2-d}{d}} + \frac{d-2}{d} C_d A^{-\frac{2}{d}} \int_{S_i}^{\beta} \frac{D(\eta)}{F(\eta) - F_w(\eta)} d\eta \right]^{\frac{d}{2-d}} d\beta.$$

## Integrální řešení: 2/2

- pro  $d \geq 3$ : Fučík, Illangasekare a Beneš (2016):

$$F(S_w) = \int_{S_i}^{S_w} \left[ (F'(S_i^+))^{\frac{2-d}{d}} + \frac{d-2}{d} C_d A^{-\frac{2}{d}} \int_{S_i}^{\beta} \frac{D(\eta)}{F(\eta) - F_w(\eta)} d\eta \right]^{\frac{d}{2-d}} d\beta,$$

s podmínkou/rovnicí pro neznámou hodnotu  $F'(S_i^+)$ :

$$1 = \int_{S_i}^{S_0} \left[ (F'(S_i^+))^{\frac{2-d}{d}} + \frac{d-2}{d} C_d A^{-\frac{2}{d}} \int_{S_i}^{\beta} \frac{D(\eta)}{F(\eta) - F_w(\eta)} d\eta \right]^{\frac{d}{2-d}} d\beta.$$

## Integrální řešení: 2/2

- pro  $d \geq 3$ : Fučík, Illangasekare a Beneš (2016):

$$F(S_w) = \int_{S_i}^{S_w} \left[ (F'(S_i^+))^{\frac{2-d}{d}} + \frac{d-2}{d} C_d A^{-\frac{2}{d}} \int_{S_i}^{\beta} \frac{D(\eta)}{F(\eta) - F_w(\eta)} d\eta \right]^{\frac{d}{2-d}} d\beta,$$

s podmínkou/rovnicí pro neznámou hodnotu  $F'(S_i^+)$ :

$$1 = \int_{S_i}^{S_0} \left[ (F'(S_i^+))^{\frac{2-d}{d}} + \frac{d-2}{d} C_d A^{-\frac{2}{d}} \int_{S_i}^{\beta} \frac{D(\eta)}{F(\eta) - F_w(\eta)} d\eta \right]^{\frac{d}{2-d}} d\beta.$$

- řešení integrální rovnice lze najít iteračně pomocí numerické integrace

## Integrální řešení: 2/2

- pro  $d \geq 3$ : Fučík, Illangasekare a Beneš (2016):

$$F(S_w) = \int_{S_i}^{S_w} \left[ (F'(S_i^+))^{\frac{2-d}{d}} + \frac{d-2}{d} C_d A^{-\frac{2}{d}} \int_{S_i}^{\beta} \frac{D(\eta)}{F(\eta) - F_w(\eta)} d\eta \right]^{\frac{d}{2-d}} d\beta,$$

s podmínkou/rovnicí pro neznámou hodnotu  $F'(S_i^+)$ :

$$1 = \int_{S_i}^{S_0} \left[ (F'(S_i^+))^{\frac{2-d}{d}} + \frac{d-2}{d} C_d A^{-\frac{2}{d}} \int_{S_i}^{\beta} \frac{D(\eta)}{F(\eta) - F_w(\eta)} d\eta \right]^{\frac{d}{2-d}} d\beta.$$

- řešení integrální rovnice lze najít iteračně pomocí numerické integrace
- online implementace řešení pro  $d = 1$ ,  $d = 2$ , a  $d \geq 3$ :

<http://mmg.fjfi.cvut.cz/~fucik/exact1d>

<http://mmg.fjfi.cvut.cz/~fucik/exact>

# Obsah

Matematické modelování

Proudění v porézním prostředí

Ukázková úloha dvoufázového proudění

Přehled přesných řešení

Přesné řešení v  $\mathbb{R}^d$  (a úkol pro SSM)

Pachatelé



# Spolupachatelé (foto rok 2007)



Tissa H. Illangasekare

RF

Michal Beneš

Jiří Mikyška