

Matematika I - Sbírka příkladů

Radek Fučík

verze: 8. září 2024

Obsah

1	Limity a spojitost	3
1.1	l'Hôpitalovo pravidlo zakázáno	4
1.2	l'Hôpitalovo pravidlo povoleno	8
1.3	Spojitosť	9
2	Derivace, inverzní funkce, tečny, normály, asymptoty	10
2.1	Derivace	11
2.2	Derivace vyšších řádů	13
3	Průběh funkce, tečny, normály, asymptoty, monotonie, inverze, extrémny	14
3.1	Aplikace derivace	15
3.2	Tečny a normály	15
3.3	Asymptoty	16
3.4	Monotonie, inverze, lokální extrémny	17
4	Extremální úlohy, konvexnost, konkávnost, inflexe	20
4.1	Konvexnost, konkávnost a inflexe	20
4.2	Extremální úlohy	21
5	Neurčité integrály a primitivní funkce	24
6	Určité Integrály	30
7	Aplikace integrálů	34
7.1	Výpočet plochy	34
7.2	Výpočet těžiště	34
7.3	Výpočet délky grafu funkce	35
7.4	Výpočet objemu rotačního tělesa	35
7.5	Výpočet povrchu rotačního tělesa	36

Předmluva

Tato sbírka je složena z příkladů (viz [1], [2], [3]), ze kterých se sestavují zkuškové písemné práce k předmětu Matematika I (1. ročník bakalářského studia na FJFI ČVUT v Praze). Příklady jsou uspořádány do 7 kapitol, přičemž do zkuškové písemky je vybrán právě jeden příklad z každé kapitoly.

Bezchybnému počítání zdar!

Radek Fučík

1 Limity a spojitost

Rozcvička

V této krátké části jsou příklady, které pro svou nižší náročnost nebudou ve zkouškové písemce, a tudíž nejsou číslovány.

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x + 1} \quad [1]$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{x - \pi} \quad [-1]$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} x \cotg 3x \quad \left[\frac{1}{3}\right]$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x^2 - 1} \quad \left[\frac{1}{2}\right]$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 2x^2 - x - 2}{x^2 - 1} \quad [2]$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 2x + 5}{4x^2 + 3x - 7} \quad \left[\frac{3}{4}\right]$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 + 2x - 15} \quad \left[\frac{3}{4}\right]$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} \quad [1]$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} x \cotg x \quad [1]$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x} \quad [5]$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 4x - 5}{x^2 - 7x + 10} \quad [2]$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^3 - x^2 + 3}{x^3 + 6x^2 - 4} \quad [5]$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{4x - 4} \quad \left[\frac{3}{4}\right]$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - 1}{x^2} \quad [-1]$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 1}{5x^3} \quad \left[\frac{1}{5}\right]$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^3 - 10x - 4}{4 - x^2} \quad \left[-\frac{13}{2}\right]$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 - 6x - 8}{2x^3 + 2} \quad \left[-\frac{5}{3}\right]$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a} \quad [\cos a]$$

Zkouškové příklady

1.1 l'Hôpitalovo pravidlo zakázáno

1. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + x - 12}{9 - 3x}$ [- $\frac{7}{3}$]
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2}$ [- $\frac{1}{2}$]
3. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^4 - 16}$ [$\frac{3}{8}$]
4. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x}{8 - x^3}$ [- $\frac{1}{6}$]
5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x + \sin^8 x - \sin^3 x}{\sin^5 x + 1 - \cos^2 x + \sin^7 x}$ [1]
6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\sin^2 x} + \sqrt{1 - \cos^2 x}}{|x|}$ [2]
7. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 2}{x^3 + 3x^2 + 4x + 4}$ [$\frac{3}{4}$]
8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 2x^2 + 5x}{(x^2 + 6) \sin x}$ [$\frac{5}{6}$]
9. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg} x} - \sqrt{1 + \sin x}}{x^3}$ [$\frac{1}{4}$]
10. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 - \sin x}}{x}$ [1]
11. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 + 2x - 35}{x^3 - 3x^2 - 9x - 5}$ [$\frac{1}{3}$]
12. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x\sqrt{1 - \cos^2 x}}$ [neex]
13. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 2x^2 + x + 2}{x^2 + 3x + 2}$ [-5]
14. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{2x^2 - 1} - \frac{x^2}{2x + 1}$ [$\frac{1}{4}$]
15. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x + 13} - 2\sqrt{x + 1}}{x^2 - 9}$ [- $\frac{1}{16}$]
16. $\lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ [1]
17. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt{1 + x \sin x} - \sqrt{\cos x}}$ [$\frac{4}{3}$]
18. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 4x}{x^4 + x - 18}$ [$\frac{8}{33}$]

19. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1 - \cos(x - 2)}{x^3 - 2x^2 - 4x + 8}$ [$\frac{1}{8}$]
20. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sinh x}{\cosh x + \sinh x}$ [$\frac{1}{2}$]
21. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sinh x}{\cosh x + \sinh x}$ [$-\infty$]
22. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{x^2}$ [$\frac{1}{4}$]
23. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x + \sin^8 x - \cos^3 x}{\sin^5 x + 1 - \cos^2 x + \sin^7 x}$ [$\frac{1}{2}$]
24. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1 + 2x} - 3}{\sqrt{x} - 2}$ [$\frac{4}{3}$]
25. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x + 1}$ [-1]
26. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt{1 + x \sin x} - \sqrt{\cos x}}$ [$\frac{4}{3}$]
27. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\sin^3 x}$ [$\frac{1}{2}$]
28. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{x - 4} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{4} \right)$ [$-\frac{1}{16}$]
29. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 3x}{\operatorname{tg} x}$ [-3]
30. $\lim_{x \rightarrow 1} (1 - x) \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} x \right)$ [$\frac{2}{\pi}$]
31. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right)}{1 - 2 \cos x}$ [$\frac{\sqrt{3}}{3}$]
32. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\frac{\pi}{2} - x}{\sin x \cos x}$ [1]
33. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\cos^3 x}$ [0]
34. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 2x^2 - x - 2}{x^2 - 1}$ [3]
35. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x + \operatorname{tg}^2 x}{x \sin x}$ [3]
36. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x}{\sqrt{x} - 1}$ [2]
37. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5 - 2x + 3x^2}{3x + 4x^2 - 7}$ [$\frac{3}{4}$]
38. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{6 + x} - 2}{x + 2}$ [$\frac{1}{4}$]

39. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^5 - (1+5x)}{x^2 + x^5}$ [10]
40. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{\sin x + x}$ [0]
41. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{\sqrt{x+2} - 2}$ [4]
42. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{1 - \operatorname{tg} x}$ [$\frac{\sqrt{2}}{2}$]
43. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 5x^4 - x^2 + 3}{4 - x^3 + 6x^2 - x^4}$ [-5]
44. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2+x} - \sqrt{2}}{\sin x}$ [$\frac{\sqrt{2}}{4}$]
45. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{1 - \cos^2 x}$ [$-\frac{1}{2}$]
46. $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{9+2x} - 5}{\sqrt[3]{x} - 2}$ [$\frac{12}{5}$]
47. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(3x)}{x} + \frac{\sin x}{3x} \right)$ [$\frac{10}{3}$]
48. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 + x^3 - 2x - 2}$ [4]
49. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{25 + x^2 - 10x}{x^3 - 9x - 3x^2 - 5}$ [0]
50. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{\sqrt{10+x} - 3}$ [6]
51. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\operatorname{tg} x}$ [0]
52. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 2x^2 + x + 2}{x^2 + 3x + 2}$ [-5]
53. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 4x}{x^4 + x - 18}$ [$\frac{8}{33}$]
54. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{\sin x}$ [$\frac{1}{2}$]
55. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x-1}$ [$\frac{1}{4}$]
56. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(4x)}{\sqrt{x+1} - 1}$ [8]
57. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x(1 + \cos x)}$ [0]

58. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{9 - x^2}{\sqrt{3x} - 3}$ [-12]
59. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{\cos(2x)}$ $[-\frac{\sqrt{2}}{2}]$
60. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sqrt{1 - \operatorname{tg} x} - \sqrt{1 + \operatorname{tg} x}}{\sin(2x)}$ $[-\frac{1}{2}]$
61. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x^2 - a^2}$ $[\frac{\cos a}{2a}]$
62. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\operatorname{tg} x} \right)$ [0]
63. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin x}{\cos^2 x} - \operatorname{tg}^2 x \right)$ $[\frac{1}{2}]$
64. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1}$ $[\frac{2}{3}]$
65. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}{x}$ $[\frac{2}{3}]$
66. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{\sqrt{x^2 + 16} - 4}$ [4]
67. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1}$ [3]
68. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \operatorname{tg} x}{\sin^3 x}$ $[-\frac{1}{2}]$
69. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{1+2x} + 1}{\sqrt[3]{2+x} + \sqrt[3]{x}}$ [1]
70. $\lim_{x \rightarrow -8} \frac{\sqrt{1-x} - 3}{2 + \sqrt[3]{x}}$ [-2]
71. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}$ $[\frac{3}{2}]$
72. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3 - 2x^2}}{x + 1}$ [1]
73. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)(1+2x)(1+3x) - 1}{x}$ [6]
74. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \cos(x^2)}}{1 - \cos x}$ $[\sqrt{2}]$
75. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x}$ $[\frac{1}{2}]$

1.2 l'Hôpitalovo pravidlo povolenó

76. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{\ln(\cos(\pi x))}$ [$\frac{1}{\pi^2}$]
77. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cosh x - 1}{\cos x - 1}$ [-1]
78. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh(x)}{\sin x}$ [1]
79. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{x + \frac{1}{x}}$ [$+\infty$]
80. $\lim_{x \rightarrow 1} (1 - x) \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} x \right)$ [$\frac{2}{\pi}$]
81. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(4e^{-x})}{x}$ [-1]
82. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + x + x^2} - \sqrt{1 - x + x^2}$ [1]
83. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1}$ [-1]
84. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x} - x$ [$\frac{1}{2}$]
85. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + x} - x$ [$+\infty$]
86. $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x - 2} - \frac{1}{|x - 2|} \right)$ [neex]
87. $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\cos x \sqrt{1 - \cos 2x}}{x}$ [$-\sqrt{2}$]
88. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \cos 3x}}{\sqrt{1 - \cos^2 x}}$ [$\frac{3}{\sqrt{2}}$]
89. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}(2x) \ln(\operatorname{tg} x)$ [-1]
90. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{\ln(\cos(2x))}$ [$\frac{1}{4}$]
91. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{2x}}{x}$ [-1]
92. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 3x - 1} - x$ [$\frac{3}{2}$]
93. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x + 1} - \sqrt{x}$ [0]
94. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{4x^2 - 5x - x^3 + 2}}{x^2 - 1}$ [neex]
95. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1 - x} - \frac{3}{1 - x^3} \right)$ [-1]

96. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1-x)(1-2x)(1-3x)(1-4x)(1-5x)}{(x-1)^5}$ [-5]
97. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^2 - 1}{2x^2 + 1} \right)^{\frac{x+2}{x+1}}$ [1]
98. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x^2 - 1}{2x^2 + 1} \right)^{\frac{1+2x}{x+1}}$ [$\frac{9}{4}$]
99. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\ln(x+1) - \ln x)$ [1]
100. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ [$\frac{\pi}{4}$]
101. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ [- $\frac{\pi}{4}$]
102. $\lim_{x \rightarrow 1-} \operatorname{arctg} \frac{1}{1-x}$ [$\frac{\pi}{2}$]
103. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arcsin \frac{x}{x+1}$ [$\frac{\pi}{2}$]

1.3 Spojitost

104. Vyšetřete charakter bodů nespojitosti funkce $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{x^2 - 1}{x}$ [v 0 skoková nespojitost]
105. Vyšetřete charakter bodů nespojitosti funkce $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x^2}$ [v 0 odstranitelná nespojitost]
106. Vyšetřete charakter bodů nespojitosti funkce $f(x) = x \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$ [v 0 odstranitelná nespojitost]
107. Vyšetřete charakter bodů nespojitosti funkce $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ [v 0 odstranitelná nespojitost]
108. Vyšetřete charakter bodů nespojitosti funkce $f(x) = \frac{1}{\operatorname{arccotg} \frac{1}{x}}$ [v 0 podstatná nespojitost]

2 Derivace, inverzní funkce, tečny, normály, asymptoty

Rozcvička

V této úvodní části jsou příklady na derivace, které pro svou nižší náročnost nebudou ve zkuškové písemce, a tudíž nejsou číslovány.

- $f(x) = \sqrt{x}(2x^2 + 3x + 5); f'(x) = ?$ [$\frac{10x^2+9x+5}{2\sqrt{x}}$]
- $f(x) = \frac{2\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}; f'(x) = ?$ [$\frac{1}{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})^2}$]
- $f(x) = \frac{\cos x - 1}{\sin x}; f'(x) = ?$ [$-\frac{1}{1+\cos x}$]
- $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 1}; f'(x) = ?$ [$\frac{2x\sqrt[3]{x^2-1}}{3(x^2-1)}$]
- $f(x) = \sin(x^2 - 1); f'(x) = ?$ [$2x \cos(x^2 - 1)$]
- $f(x) = \sqrt[3]{x}(2x^2 + 1); f'(x) = ?$ [$\frac{\sqrt[3]{x}(14x^2+1)}{3x}$]
- $f(x) = \frac{1+x}{\sqrt{x}}; f'(x) = ?$ [$\frac{x-1}{2x\sqrt{x}}$]
- $f(x) = \frac{1+\cos x}{1-\cos x}; f'(x) = ?$ [$-\frac{2\sin x}{(1-\cos x)^2}$]
- $f(x) = \sqrt{\sin x}; f'(x) = ?$ [$\frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$]
- $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}; f'(x) = ?$ [$-\frac{x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$]
- $f(x) = \sin \sqrt{x}; f'(x) = ?$ [$\frac{\cos \sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$]
- $f(x) = \sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x}; f'(x) = ?$ [$\frac{\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x}}{2x}$]
- $f(x) = \frac{(1-\sqrt{x})^2}{2x}; f'(x) = ?$ [$\frac{\sqrt{x}-1}{2x^2}$]
- $f(x) = \frac{x^3}{3}(\ln x - \frac{1}{3}); f'(x) = ?$ [$x^2 \ln x$]
- $f(x) = \frac{x^2+1}{(1-x)^2}; f'(x) = ?$ [$\frac{2(x+1)}{(1-x)^3}$]
- $f(x) = x\sqrt{1+x^2}; f'(x) = ?$ [$\frac{2x^2+1}{\sqrt{1+x^2}}$]
- $f(x) = -\frac{2\cos x}{3} - \frac{\cos x \sin^2 x}{3}; f'(x) = ?$ [$\sin^3 x$]
- $f(x) = \sin^4 x - \cos^4 x; f'(x) = ?$ [$2\sin(2x)$]
- $f(x) = \operatorname{tg}^4 x - 2\operatorname{tg}^2 x - 4\ln \cos x; f'(x) = ?$ [$4\operatorname{tg}^5 x$]
- $f(x) = \frac{2}{\sin x} - \frac{\cos x}{3} + \operatorname{tg} x; f'(x) = ?$ [$-\frac{2\cos x}{\sin^2 x} + \frac{\sin x}{3} + \frac{1}{\cos^2 x}$]

- $f(x) = \frac{3}{2x-4} + 6x^2\sqrt{x}; f'(x) = ?$ [$-\frac{6}{(2x-4)^2} + 15x\sqrt{x}$]
- $f(x) = (a^2 - x^2)\frac{x-1}{x}; f'(x) = ?$ [($2-2x$) + ($a^2 - x^2$) x^{-2}]
- $f(x) = \sqrt{x^2 - \sqrt{x}}; f'(x) = ?$ [$\frac{1}{2\sqrt{x^2 - \sqrt{x}}}(2x - \frac{1}{2\sqrt{x}})$]
- $f(x) = \ln(x^3); f'(x) = ?$ [$\frac{3}{x}$]
- $f(x) = \ln^3 x; f'(x) = ?$ [$\frac{3}{x} \ln^2 x$]
- $f(x) = \ln \operatorname{tg} x; f'(x) = ?$ [$\frac{2}{\sin 2x}$]
- $f(x) = \ln \sin x; f'(x) = ?$ [$\cotg x$]
- $f(x) = \frac{\sin x}{1 + \cos x}; f'(x) = ?$ [$\frac{1}{1 + \cos x}$]
- $f(x) = \operatorname{arctg}(x^2 + 1); f'(x) = ?$ [$\frac{2x}{x^4 + 2x^2 + 2}$]
- $f(x) = \operatorname{arctg} x^2 + 1; f'(x) = ?$ [$\frac{2x}{x^4 + 1}$]
- $f(x) = \ln \sin(x^3 - 2x + 1); f'(x) = ?$ [($3x^2 - 2$) $\cotg(x^3 - 2x + 1)$]
- $f(x) = \ln(e^x + e^{-x}); f'(x) = ?$ [$\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$]
- $f(x) = a^{\sqrt{x}}; f'(x) = ?$ [$\frac{\ln a}{2\sqrt{x}} a^{\sqrt{x}}$]
- $f(x) = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}; f'(x) = ?$ [$\frac{2 \sin x}{(1 + \cos x)^2}$]
- $f(x) = x \ln x; f'(x) = ?$ [$\ln x + 1$]
- $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}; f'(x) = ?$ [$\frac{a^2}{(x^2 + a^2)^{3/2}}$]
- Nalezněte n . derivaci funkce e^x [e^x]

Zkouškové příklady

2.1 Derivace

1. Nechť je dána funkce $f(x) = x\sqrt[3]{|x+1|}$.
 - (a) Nalezněte definiční obor funkce f , rozhodněte o spojitosti a nalezněte derivaci funkce f v každém bodě D_f kromě bodu $x = -1$.
 - (b) Rozhodněte o existenci derivace funkce f v bodě $x = -1$.

[spojitá na $D_f = \mathbb{R}$, $f'(-1)$ neex]
2. Nechť je dána funkce $f(x) = \ln(\ln x)$.
 - (a) Nalezněte definiční obor D_f , první derivaci f' a její definiční obor $D_{f'}$.
 - (b) Je tato funkce prostá na svém definičním oboru? Pokud ano, nalezněte inverzní funkci f^{-1} a její první derivaci $(f^{-1})'$.

$$[D_f = (1, +\infty), f'(x) = \frac{1}{x \ln x}, D_{f'} = (0, 1) \cup (1, +\infty), f^{-1}(x) = \exp(\exp(x)), (f^{-1})'(x) = \exp(\exp(x))(\exp(x))]$$

3. Necht' je dána funkce $f(x) = \begin{cases} \cos(\sqrt{x}) & \text{pro } x > 0 \\ 1 & \text{pro } x = 0 \\ \cos(\sqrt{-x}) & \text{pro } x < 0. \end{cases}$

(a) Je funkce f spojitá v bodě $x = 0$? Své rozhodnutí zdůvodněte.

(b) Z definice jednostranné derivace nalezněte $f'_-(0)$ a $f'_+(0)$ a rozhodněte o existenci derivace $f'(0)$.

$$[\text{Spojitá na } \mathbb{R}, f'_+(0) = -1/2, f'_-(0) = 1/2, f'(0) \text{ neex}]$$

4. Funkci $f(x) = \frac{1 - \cos x}{\sin x}$ dodefinujte v bodě $x = 0$ tak, aby byla spojitá a pro takto dodefinovanou funkci nalezněte z definice derivaci $f'(0)$.

$$[0, \frac{1}{2}]$$

5. Nalezněte derivaci funkce $f(x) = \arccos \sqrt{\frac{1}{1+x^2}}$. [$\pm \frac{1}{1+x^2}$]

6. Nalezněte derivaci funkce $f(x) = \arcsin(2x\sqrt{1-x^2})$. [$\pm \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$]

7. Nalezněte derivaci funkce $f(x) = \frac{x}{x + \sqrt{a^2 + x^2}}$. [$\frac{a^2}{\sqrt{a^2 + x^2}(x + \sqrt{a^2 + x^2})^2}$]

8. Nalezněte derivaci funkce $f(x) = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1-x}{1+x}}$. [$\frac{2}{(1+x)^2} (1 - \ln \frac{1+x}{1-x}) \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1-x}{1+x}}$]

9. Nalezněte derivaci funkce $f(x) = x^{1/x}$. [$x^{1/x-2}(1 - \ln x)$]

10. Nalezněte derivaci funkce $f(x) = x^{\sin x}$. [$x^{\sin x}(\cos \ln x + x^{-1} \sin x)$]

11. Nalezněte derivaci funkce $f(x) = \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{x^2 + 1}\right)$. [$\frac{1-x^2}{1+3x^2+x^4}$]

12. Nalezněte derivaci funkce $f(x) = \frac{1}{2} \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} - \frac{\cos x}{2 \sin^2 x}$. [$\frac{1}{\sin^3 x}$]

13. Nalezněte derivaci funkce $f(x) = \arcsin \left(\frac{x}{x^2 + 1}\right)$. [$\frac{1-x^2}{1+x^2} (1+x^2+x^4)^{-1/2}$]

14. Nalezněte derivaci funkce $f(x) = \arcsin(\operatorname{tg} x)$. [$\frac{1}{|\cos x| \sqrt{\cos 2x}}$]

15. Nalezněte derivaci funkce $f(x) = \frac{2x+7}{(x^3+2x+5)^2}$. [$\frac{-10x^3-42x^2-4x-18}{(x^3+2x+5)^3}$]

16. Nalezněte D_f a derivaci funkce $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$. [$D_f = [0, +\infty)$, $\frac{1 + \frac{1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$]

17. Nalezněte D_f a derivaci funkce $f(x) = \sqrt{\sin \sqrt{x}}$. [$D_f = (0, \pi^2)$, $\frac{\cos \sqrt{x}}{4\sqrt{x} \sqrt{\sin \sqrt{x}}}$]

18. Nalezněte derivaci funkce $f(x) = \sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^3}}$ pro $|x| \neq 1$. [$1/3 \left(3 \frac{x^2}{1-x^3} + 3 \frac{(1+x^3)x^2}{(1-x^3)^2}\right) \left(\frac{1+x^3}{1-x^3}\right)^{-2/3}$]

19. Nalezněte D_f a derivaci funkce $f(x) = \ln \ln \ln x$. [$D_f = (e, +\infty)$, $\frac{1}{\ln \ln x} \frac{1}{\ln x} \frac{1}{x}$]

20. Nalezněte derivaci funkce $f(x) = \ln\left(\frac{1}{x} + \ln\frac{1}{x}\right)$. [$-\frac{1}{x^2} \frac{x+1}{x + \ln\frac{1}{x}}$]
21. Nalezněte derivaci funkce $f(x) = \ln\sqrt{\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}}$. [$-\frac{1}{\cos x}$]
22. Nalezněte derivaci funkce $f(x) = x(\sin \ln x - \cos \ln x)$. [$2 \sin \ln x$]
23. Nalezněte derivaci funkce $f(x) = \operatorname{arctg}\left(x - \sqrt{1+x^2}\right)$. [$-\frac{x - \sqrt{1+x^2}}{2\sqrt{1+x^2}(1+x^2 - x\sqrt{1+x^2})}$]
24. Nalezněte derivaci funkce $f(x) = x + \sqrt{1-x^2} \arccos x$. [$-\frac{x \arccos x}{\sqrt{1-x^2}}$]
25. Nalezněte derivaci funkce $f(x) = \arcsin \frac{1-x^2}{1+x^2}$ pro $x \neq 0$. [$-\operatorname{sign} x \frac{2}{1+x^2}$]
26. Nalezněte D_f a derivaci funkce $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{x}{1 + \sqrt{1-x^2}}$ pro $|x| < 1$. [$D_f = \{|x| \leq 1\}$, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$]
27. Nalezněte derivaci funkce $f(x) = \operatorname{arccotg} \frac{1-2x}{2\sqrt{x-x^2}}$ pro $x \in (0, 1)$. [$\frac{1}{\sqrt{x-x^2}}$]
28. Nalezněte derivaci funkce $f(x) = \ln\left(e^x + \sqrt{1+e^{2x}}\right)$. [$\frac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}$]
29. Nalezněte derivaci funkce $f(x) = \frac{\cosh x}{\sinh^2 x} - \ln \operatorname{cotgh}\left(\frac{x}{2}\right)$. [$-\frac{2}{\sinh^3 x}$]
30. Nalezněte derivaci funkce $f(x) = \ln\left(\cos^4 x (1 + 2\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^4 x)\right)$. [0]

2.2 Derivace vyšších řádů

31. Nalezněte derivaci řádu $n \in \mathbb{N}_0$ funkce $f(x) = a^x$, kde $a > 0$. [$f^{(n)}(x) = \ln^n(a) a^x$]
32. Nalezněte derivaci řádu $n \in \mathbb{N}_0$ funkce $f(x) = \cos x$. [$f^{(2k)}(x) = (-1)^k \cos x$, $f^{(2k+1)}(x) = (-1)^{k+1} \sin(x)$]
33. Nalezněte derivaci řádu $n \in \mathbb{N}_0$ funkce $f(x) = \sin x$. [$f^{(2k)}(x) = (-1)^k \sin x$, $f^{(2k+1)}(x) = (-1)^k \cos(x)$]
34. Nalezněte derivaci řádu $n \in \mathbb{N}_0$ funkce $f(x) = x^n$. [$f^{(n)} = n!$]
35. Nalezněte derivaci 2. řádu funkce $f(x) = \operatorname{tg} x$. [$f'' = \frac{2 \sin x}{\cos^3 x}$]
36. Nalezněte derivaci 2. řádu funkce $f(x) = x \ln x$. [$f'' = \frac{1}{x}$]
37. Nalezněte derivaci 2. řádu funkce $f(x) = (1+x^2)\operatorname{arctg} x$. [$f'' = 2\operatorname{arctg} x + \frac{2x}{1+x^2}$]
38. Nalezněte derivaci 4. řádu funkce $f(x) = \sqrt{x}$. [$f^{(4)} = -\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} x^{-\frac{7}{2}}$]

3 Průběh funkce, tečny, normály, asymptoty, monotonie, inverze, extrémny

Rozcvička

V této části jsou příklady na procvičení vyšetřování průběhu funkce (D_f , limity, horizontální či vertikální tečny, asymptoty, lokální extrémny, náčrtek grafu funkce), které nejsou zahrnuty ve zkuškové písence, a tudíž nejsou číslovány.

- $f(x) = 2 + x - x^2$
- $f(x) = 3x - x^3$
- $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x$
- $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 4}$
- $f(x) = (x - 1)^2(2x + 4)$
- $f(x) = 2x^2 - \ln x$
- $f(x) = \sqrt{x^2 + 2}$
- $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x + 1}$
- $f(x) = x + \cos 2x$
- $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$
- $f(x) = x + \frac{1}{x}$
- $f(x) = x + \arctan x$
- $f(x) = (x + 1)^3 \sqrt[3]{x^2}$
- $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$
- $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$
- $f(x) = \frac{x}{3 - x^2}$
- $f(x) = (x - 3)\sqrt{x}$
- $f(x) = x^2 - \ln x^2$
- $f(x) = \cos \frac{\pi}{x}$
- $f(x) = x + \sin x$

[↘ -1 ↗ 1 ↘]

Zkouškové příklady

3.1 Aplikace derivace

1. Ukažte, že funkce $f(x) = 2\operatorname{arctg} \frac{x}{1 + \sqrt{1 - x^2}} - \arcsin x$ nezávisí na x . [f' = 0]
2. Ukažte, že funkce $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1 + x}{1 - x} - \operatorname{arctg} x$ nezávisí na x . [f' = 0]
3. Ukažte, že funkce $f(x) = \arcsin x + 3 \arccos x + \arcsin \left(2x\sqrt{1 - x^2} \right)$ nezávisí na x při $x^2 < \frac{1}{2}$. [f' = 0]
4. Ukažte, že funkce $f(x) = \operatorname{arctg} x - \arcsin \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$ nezávisí na x . [f' = 0]
5. Ukažte, že funkce $f(x) = \operatorname{arccotg} x - \arcsin \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$ nezávisí na x při $x \geq 0$. [f' = 0]

6. 3.2 Tečny a normály

7. Určete čísla a a b tak, aby přímka $y = 3x + b$ byla tečnou funkce $f(x) = \ln(x^3 + a)$ v bodě $x = 1$.
[a=0, b=-3]
8. Nechť je dána funkce $f(x) = \sin(x) \cos\left(\frac{x}{2}\right)$ na intervalu $[-\pi, \pi]$. Nalezněte rovnici tečny v bodě $x = \frac{\pi}{2}$.
[y = -\frac{\sqrt{2}}{4}x + \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + \frac{\pi}{4})]
9. Nechť je dána funkce $f(x) = x(e^{-x} + 5)$. Nalezněte rovnici tečny v bodě $x = 0$.
[y = 6x]
10. Nechť je dána funkce $f(x) = \ln \left[\left(\frac{3x - 1}{x + 1} \right)^x \right]$. Nalezněte rovnici tečny v bodě $x = 1$.
[y = x - 1]
11. Nalezněte rovnici tečny a normály ke grafu funkce $f(x) = x^2 - 5x + 4$ v bodě -1 .
[tečna: $y = -7x + 3$, normála: $y = \frac{1}{7}x + \frac{71}{7}$]
12. Nalezněte rovnici tečny a normály ke grafu funkce $f(x) = x^2 - 5x + 4$ v bodě 3 .
[tečna: $y = x - 5$, normála: $y = -x + 1$]
13. Nalezněte rovnici tečny a normály ke grafu funkce $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x - 3$ v bodě -2 .
[tečna: $y = 5$, normála: $x = -2$]
14. Nalezněte rovnici tečny a normály ke grafu funkce $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x - 3$ v bodě 1 .
[tečna: $y = 3x - 7$, normála: $x = -\frac{1}{3}x - \frac{11}{3}$]
15. Nalezněte rovnici tečny a normály ke grafu funkce $f(x) = \sqrt{x}$ v bodě $x = 0$.
[tečna: $x = 0$, normála: $y = 0$]

16. Nalezněte rovnici tečny a normály ke grafu funkce $f(x) = \ln x$ v bodě 1.
[tečna: $y = x - 1$, normála: $y = 1 - x$]
17. Ve kterých bodech je tečna ke grafu funkce $f(x) = 2 + x - x^2$ rovnoběžná s osou x a s přímkou $y = x$?
[s osou x : $\frac{1}{2}$, s přímkou $y = x$: 0]
18. Pod jakým úhlem protíná graf funkce $y = \ln x$ osu x ?
[úhel $\text{tg } \alpha = 1$, tj. $\frac{\pi}{4}$]
19. Pod jakým úhlem (vzhledem k ose x) protíná graf funkce $f(x) = e^{\frac{x}{2}}$ přímkou $x = 2$?
[$\text{arctg } \frac{e}{2}$]
20. Nalezněte rovnici normály ke křivce $y = -\sqrt{x} + 2$ v jejím průsečíku s přímkou $y = x$.
[$y = 2x - 1$]
21. Určete rovnice tečen ke křivce $y = x^3 + x^2 - 2x$ v průsečících křivky s osou x .
[$6x - y + 12 = 0$; $2x + y = 0$; $3x - y - 3 = 0$]
22. Ve kterém bodě má graf funkce $y = \sin^2 x$ tečnu svírající s osou x úhel $\frac{\pi}{4}$?
[$(\pi/4 + k\pi, 1/2)$; $k \in \mathbb{Z}$]
23. Ve kterém bodě má graf funkce $y = xe^{-x}$ tečnu rovnoběžnou s osou x ?
[$(1, e^{-1})$]

3.3 Asymptoty

24. Nalezněte všechny asymptoty funkce $f(x) = \frac{x}{x-1}$ (včetně vertikálních asymptot).
[$y=1$ v $\pm\infty$, $x=1$]
25. Nechť je dána funkce $f(x) = x(e^{-x} + 5)$. Určete definiční obor D_f a rozhodněte o existenci asymptot v $+\infty$ a v $-\infty$ a v kladném případě napište jejich rovnice.
[$D_f = \mathbb{R}$. Pouze v $+\infty$: $y = 5x$]
26. Nechť je dána funkce $f(x) = \sqrt{x^2 - x - 6}$. Určete definiční obor D_f a nalezněte rovnice asymptot v $+\infty$ a v $-\infty$.
[$D_f = (-\infty, -2) \cup (3, +\infty)$, $y = 1x - \frac{1}{2}$, $y = -1x + \frac{1}{2}$]
27. Nechť je dána funkce $f(x) = \ln \left[\left(\frac{3x-1}{x+1} \right)^x \right]$. Určete definiční obor D_f a rozhodněte o existenci asymptot a v kladném případě napište jejich rovnice.
[$D_f = (-\infty, -1) \cup (\frac{1}{3}, +\infty)$. V $\pm\infty$: $y = x \ln 3 - 4/3$]
28. Ve kterém bodě má parabola $y = 2x^2 + 3x - 1$ tečnu
- se směrovým úhlem $\frac{\pi}{4}$?
 - rovnoběžnou s přímkou $5x - y + 3 = 0$
 - kolmou na přímkou $x - 3y + 2 = 0$

$$[(-1/2, -2), (1/2, 1), (-3/2, -1)]$$

29. Určete rovnice tečen ke křivce $y = x^3 + x^2 - 6x$ v průsečících s osou x .

$$[15x - y + 45 = 0, 6x + y = 0, 10x - y - 20 = 0]$$

30. Je dána parabola $y = x^2 - 4x + 3$

- určete dotykový bod a rovnici tečny paraboly, která má směrový úhel $\frac{\pi}{4}$
- pomocí derivace určete vrchol paraboly

$$[(5/2, -3/4), x - y - 13/4 = 0, (2, -1)]$$

31. Je dána parabola $y = \frac{1}{2}x^2 + 3x + 1$

- určete rovnici tečny paraboly v bodě -2
- ve kterém bodě má parabola tečnu se směrovým úhlem $\frac{\pi}{3}$?
- ve kterém bodě má parabola tečnu rovnoběžnou s přímkou $5x - y - 2 = 0$?

$$[x - y - 1 = 0, (\sqrt{3} - 3, -2), (2, 9)]$$

3.4 Monotonie, inverze, lokální extrémny

32. Nalezněte D_f , intervaly monotonie a lokální extrémny funkce $f(x) = \arcsin \sqrt{1 - x^2}$

$$[D_f = [-1, 1], -1 \nearrow 0 \searrow 1]$$

33. Nalezněte D_f a intervaly monotonie funkce $f(x) = \frac{x}{\ln x}$

$$[D_f = (0, 1) \cup (1, +\infty), 0 \searrow 1 \searrow e \nearrow]$$

34. Nalezněte D_f a intervaly monotonie funkce $f(x) = \frac{x^2 - 2x - 2}{x - 1}$

$$[D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}, \text{ostře roste na } D_f]$$

35. Nalezněte D_f , intervaly monotonie a lokální extrémny funkce $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{4 - x}$

$$[D_f = [0, 4], 0 \nearrow 2 \searrow 4]$$

36. Nalezněte D_f a intervaly monotonie funkce $f(x) = \frac{8}{x\sqrt{4 - x^2}}$

$$[D_f = (-2, 0) \cup (0, 2), -2 \nearrow -\sqrt{2} \searrow 0 \searrow \sqrt{2} \nearrow 2]$$

37. Nalezněte D_f a intervaly monotonie funkce $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

$$[D_f = (0, +\infty), 0 \nearrow e^2 \searrow +\infty]$$

38. Nalezněte intervaly monotonie funkce $f(x) = e^{\sin x}$

$$[\text{roste na } (-\frac{\pi}{2} + k2\pi, \frac{\pi}{2} + k2\pi), \text{klesá na } (\frac{\pi}{2} + k2\pi, \frac{3\pi}{2} + k2\pi)]$$

39. Nalezněte intervaly monotonie funkce $f(x) = \frac{1 - x^2}{1 + x^2}$

$$[-\infty \nearrow 0 \searrow +\infty]$$

40. Nalezněte intervaly monotonie a lokální extrémny funkce $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 1}$

$$[-\infty \nearrow -1 \searrow 1 \nearrow +\infty]$$

41. Nalezněte intervaly monotonie a lokální extrémů funkce $f(x) = (x - 2)^2|x - 5|$
 $[-\infty \searrow 2 \nearrow 4 \searrow 5 \nearrow +\infty]$
42. Nalezněte D_f , intervaly monotonie a lokální extrémů funkce $f(x) = \ln \frac{e^x}{1 - x^2}$
 $[D_f = (-1, 1), -1 \searrow 1 - \sqrt{2} \nearrow 1]$
43. Nalezněte D_f , intervaly monotonie funkce $f(x) = xe^{-\frac{1}{x}}$
 $[D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}, -\infty \nearrow -1 \searrow 0 \nearrow +\infty]$
44. Nalezněte D_f , intervaly monotonie a lokální extrémů funkce $f(x) = \frac{x}{x^2 + 2x + 9}$
 $[D_f = \mathbb{R}, -\infty \searrow -3 \nearrow 3 \searrow +\infty]$
45. Nalezněte intervaly monotonie a lokální extrémů funkce $f(x) = \cosh^3 x + 1$
 $[-\infty \searrow 0 \nearrow +\infty]$
46. Nalezněte D_f , intervaly monotonie a lokální extrémů funkce $f(x) = x + \frac{2x}{x^2 - 1}$
 $[D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}, -\infty \nearrow -\sqrt{2 + \sqrt{5}} \searrow -1 \searrow 1 \searrow \sqrt{2 + \sqrt{5}} \nearrow +\infty]$
47. Rozhodněte, kde je funkce $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x}$ prostá (tj. intervaly monotonie) a na těchto intervalech nalezněte její inverzní funkci.
 $[f^{-1} = \frac{y \pm \sqrt{y^2 + 4}}{2}]$
48. Nalezněte intervaly monotonie a lokální extrémů funkce $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 5$
 $[-\infty \nearrow -3 \searrow 1 \nearrow +\infty]$
49. Nalezněte intervaly monotonie a lokální extrémů funkce $f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x - 3$
 $[-\infty \nearrow 1 \searrow 5 \nearrow +\infty]$
50. Nalezněte intervaly monotonie a lokální extrémů funkce $f(x) = x^3 - 3x^2 + 6x - 9$
 $[-\infty \nearrow +\infty]$
51. Nalezněte intervaly monotonie a lokální extrémů funkce $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + x^3 - 4x + 7$
 $[-\infty \searrow -2 \searrow 1 \nearrow +\infty]$
52. Nalezněte intervaly monotonie a lokální extrémů funkce $f(x) = (x - 4)^4(x + 3)^3$
 $[-\infty \nearrow -3 \nearrow 0 \searrow 4 \nearrow +\infty]$
53. Nalezněte intervaly monotonie a lokální extrémů funkce $f(x) = xe^{-x}$
 $[-\infty \nearrow 1 \searrow +\infty]$
54. Nalezněte D_f , intervaly monotonie a lokální extrémů funkce $f(x) = \sqrt{x} \ln x$
 $[D_f = (0, +\infty), 0 \searrow e^{-2} \nearrow +\infty]$
55. Nalezněte D_f , intervaly monotonie a lokální extrémů funkce $f(x) = x^2 \ln x$
 $[D_f = (0, +\infty), 0 \searrow e^{-\frac{1}{2}} \nearrow +\infty]$
56. Nalezněte D_f , intervaly monotonie a lokální extrémů funkce $f(x) = x \ln^2 x$
 $[D_f = (0, +\infty), 0 \nearrow e^{-2} \searrow 1 \nearrow +\infty]$

57. Nalezněte D_f , intervaly monotonie a lokální extrémů funkce $f(x) = \ln x - \operatorname{arctg} x$
[$D_f = (0, +\infty)$, $0 \nearrow +\infty$]
58. Nalezněte intervaly monotonie a lokální extrémů funkce $f(x) = x^3 - 6x^2 - 63x + 5$
[max -3, min 7]
59. Nalezněte D_f , intervaly monotonie a lokální extrémů funkce $f(x) = \frac{\ln^2 x}{x}$
[$D_f = (0, +\infty)$, $0 \searrow 1 \nearrow e^2 \searrow +\infty$]

4 Extremální úlohy, konvexnost, konkávnost, inflexe

Rozcvička

V této části jsou příklady na procvičení hledání lokálních extrémů, které pro svou nižší náročnost nejsou zahrnuty ve zkouškové písemce, a tudíž nejsou číslovány.

- Úsečku rozdělte na dvě části tak, aby součet obsahů čtverců sestrojených nad oběma částmi byl minimální.

[v polovině]

- Ze všech obdélníků s daným obsahem určete ten, který má nejmenší obvod.

[$a = b = \sqrt{S}$, kde S je obsah]

- Jak volit rozměry pozemku pravoúhlého tvaru, máme-li jej oplotit pletivem délky 60m a chceme aby obsah byl co největší?

[$15 \times 15 = 225$]

Zkouškové příklady

4.1 Konvexnost, konkávnost a inflexe

1. Vyšetřete konvexnost, konkávnost a inflexní body funkce $f(x) = \frac{|x^2 - 3x - 4|}{x}$
[konvexní na $(-\infty, -1)$ a $(0, 4)$, konkávní na $(-1, 0)$ a $(4, +\infty)$, inflex $x = -1, x = 4$]

2. Vyšetřete konvexnost, konkávnost a inflexní body funkce $f(x) = 1 + \sqrt[3]{x}$
[TODO]

3. Vyšetřete konvexnost, konkávnost a inflexní body funkce $f(x) = 3x^2 - x^3$
[TODO]

4. Vyšetřete konvexnost, konkávnost a inflexní body funkce $f(x) = \frac{2x}{1 + x^2}$
[TODO]

5. Vyšetřete konvexnost, konkávnost a inflexní body funkce $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$
[konvexní na \mathbb{R}]

6. Vyšetřete konvexnost, konkávnost a inflexní body funkce $f(x) = \frac{|x - 1|}{x^2}$
[TODO]

7. Vyšetřete konvexnost, konkávnost a inflexní body funkce $f(x) = \ln(1 + x^2)$
[konvexní na $(-1, 1)$, konkávní na $(-\infty, -1)$ a $(1, +\infty)$, inflex $x = -1, x = 1$]

8. Vyšetřete konvexnost, konkávnost a inflexní body funkce $f(x) = x^3 \ln x + 1$
[TODO]

4.2 Extremální úlohy

9. Z desky tvaru trojúhelníku, jehož základna je a a výška v a úhly při základně jsou ostré, má být vyříznuta obdélníková deska; přičemž jedna strana obdélníku je částí základny. Pomocí techniky hledání extrémů určete rozměry obdélníku tak, aby jeho obsah byl maximální.

$$[x = \frac{a}{2}, y = \frac{v}{2}]$$

10. Určete rozměry parního kotle tvaru válce tak, aby při daném objemu V bylo ochlazování páry nejmenší - tj. aby povrch válce (včetně podstav) byl minimální.

$$[r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}, v = \frac{V}{\pi r^2}]$$

11. Ze všech pravoúhlých trojúhelníků s daným součtem délek přepony a odvěsny k určete ten jehož obsah je největší.

$$[y = k/3, x = \sqrt{3}/3k, \alpha = \pi/6]$$

12. Chceme oplotit výběh pro slípky, který má mít tvar pravoúhelníku. Přitom máme k dispozici 200m pletiva a víme, že část plotu budou tvořit 2 celé stěny drůbežárny, jejíž obdélníkový půdorys má rozměry $a = 16\text{m}$ a $b = 10\text{m}$. Jaké rozměry musí mít výběh, aby měl co největší obsah?

$$[\text{čtverec } 56, 5\text{m}]$$

13. Pomocí techniky hledání extrémů určete rozměry obsahově maximálního obdélníka vepsaného elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$$[a\sqrt{2}, b\sqrt{2}]$$

14. Pomocí techniky hledání extrémů určete rozměry objemově maximálního válce vepsaného do koule o poloměru R .

$$[v = 2R/\sqrt{3}, r = R\sqrt{2/3}]$$

15. Jaké rozměry musí mít bazén se čtvercovým dnem a objemem $V = 32\text{m}^3$, má-li se na jeho vyzdění spotřebovat co nejméně materiálu?

$$[4, 4, 2]$$

16. Pomocí techniky hledání extrémů vepište do půlkruhu o poloměru r obdélník maximální plochy.

$$[r\sqrt{2}, \frac{r}{\sqrt{2}}]$$

17. Dolní část okna má tvar obdélníka, horní tvar půlkruhu. Délka rámu celého okna je P . Při jakých rozměrech bude okno propouštět nejvíce světla?

$$[\frac{2P}{\pi+4}, \frac{P}{4+\pi}]$$

18. Nechť je dána funkce $f(x) = \sin(x)\sqrt{1 - \cos^2(x)}$ na intervalu $[-\pi, \pi]$.

(a) Rozhodněte, zda existuje první derivace funkce f v bodě $x = 0$.

(b) Nalezněte všechny lokální extrémy a intervaly monotonie funkce $f(x)$ na intervalu $(-\pi, \pi)$. Jsou tyto lokální extrémy též globálními extrémy na uvažovaném intervalu $[-\pi, \pi]$?

[TODO]

19. Nechť je dána funkce $f(x) = x + 2\sqrt{1 - \cos^2(x)}$.

(a) Rozhodněte, zda existuje první derivace funkce f v bodě $x = 0$.

(b) Nalezněte všechny lokální extrémů a intervaly monotonie funkce $f(x)$ na intervalu $(-\pi, \pi)$. Jsou tyto lokální extrémů též globálními extrémů na uvažovaném intervalu $[-\pi, \pi]$?

[(a) neex.; (b) $-\pi \nearrow -\frac{\pi}{3} \searrow 0 \nearrow \frac{2\pi}{3} \searrow \pi$, glob. max v $\frac{2\pi}{3}$]

20. Nalezněte definiční obor, lokální extrémů a intervaly monotonie funkce $f(x) = \left(\frac{x^2}{x+1}\right)^{\frac{1}{4}}$

$[D_f = (-1, +\infty), -1 \searrow 0 \nearrow +\infty]$

21. Nechť součet dvou čísel je 12, určete tato čísla tak, aby

(a) součet třetích mocnin byl minimální

(b) součin jednoho s třetí mocninou druhého byl maximální

(c) obě byla kladná a součin jednoho s druhou mocninou druhého byl maximální.

[TODO]

22. Ukažte, že pro všechna $x > 0$ je funkce $\ln x$ vždy menší než \sqrt{x} . (Návod: zkoumejte extrémů rozdílu těchto funkcí.)

[maximum $\ln x - \sqrt{x}$ je $2 \ln 2 - 2 < 0$]

23. Ukažte, že pro všechna $x \in \mathbb{R}$ je funkce $1+x$ vždy menší nebo rovna e^x . (Návod: zkoumejte extrémů rozdílu těchto funkcí.)

[minimum $e^x - x - 1$ je 0 v $x = 0$]

24. Ukažte, že pro všechna $x > -1$ je funkce $\ln(1+x)$ vždy menší nebo rovna x . (Návod: zkoumejte extrémů rozdílu těchto funkcí.)

[minimum $x - \ln(1+x)$ je pro $x = 0$]

25. Ukažte, že pro všechna $x > 0$ je funkce $\operatorname{arctg} x$ vždy menší než x . (Návod: zkoumejte extrémů rozdílu těchto funkcí.)

[$\operatorname{arctg} x - x$ je pro $x > 0$ ostře klesající a záporná]

26. Určete kladný parametr $A > 0$ tak, aby objem tělesa, které vznikne rotací funkce

$$f(x) = Ax + \frac{1}{A(x+1)}$$
 okolo osy x na intervalu $[0, 1]$ byl minimální !

$[A = \sqrt[4]{3/2}]$

27. Je-li rozdíl dvou čísel rovný 10, je jejich součin větší než -30 ?

[ano]

28. Nit délky l se má rozstříhnout na dvě části, z jedné části se udělá kružnice a ze druhé čtverec. Určete délky jednotlivých částí tak, aby součet ploch čtverce a kruhu byl minimální.

$[l_1 = \frac{l\pi}{4+\pi}, l_2 = \frac{4l}{4+\pi}]$

29. Nit délky l se má rozstříhnout na dvě části. Z jedné části se udělá kružnice a ze druhé rovnostranný trojúhelník. Určete délky jednotlivých částí tak, aby součet ploch trojúhelníku a kruhu byl minimální.

[TODO]

30. Do koule o poloměru R vepište válec s maximálním objemem.

$$[r = R\sqrt{\frac{2}{3}}, v = \frac{2R}{\sqrt{3}}]$$

31. Do koule o poloměru R vepište válec s maximálním povrchem.

$$[r = R\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{10}}, v = R\sqrt{2 - \frac{2\sqrt{5}}{2}}]$$

32. Jaký je maximální objem kužele s danou stranou s ?

$$[\frac{2\pi}{9\sqrt{3}}s^3]$$

33. Při jakých rozměrech má válec daného objemu V nejmenší povrch?

$$[v = 2\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}, r = \frac{v}{2}]$$

34. Z papíru tvaru obdélníka se stranami a a b vyrobíme krabičku tak, že vystříhneme ze všech čtyř rohů stejné čtverce. Krabička bude mít výšku rovnou straně tohoto čtverce. Pomocí techniky hledání extrémů nalezněte délku strany čtverce, při níž bude objem krabičky největší.

$$[\frac{1}{6}(a + b - \sqrt{a^2 - ab + b^2})]$$

5 Neurčité integrály a primitivní funkce

Rozcvička

V této úvodní části jsou příklady na integrály, které pro svou nižší náročnost nebudou ve zkuškové písemce, a tudíž nejsou číslovány.

- $\int \sin(3x) dx$
- $\int \sqrt{3} \sin x + \cos(2x) dx$
- $\int (4 - \sqrt{x})^2 dx$ [$16x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{16}{3}x^{3/2} + C$]
- $\int xe^{-x^2} dx$ [$-\frac{1}{2}e^{-x^2} + C$]

Zkouškové příklady

1. $\int x^{-\frac{3}{4}}(x^{\frac{1}{4}} + 1) dx$ [$2\sqrt{x} + 4\sqrt[4]{x} + C$]
2. $\int x \cos(\pi x^2) dx$ [$\frac{\sin(\pi x^2)}{2\pi} + C$]
3. $\int 3x^2(x^3 + 1)^\pi dx$ [$\frac{(x+1)(x^2-x+1)(x^3+1)^\pi}{\pi+1} + C = \frac{(x^3+1)^{\pi+1}}{\pi+1} + C$]
4. $\int \cos^4 x \sin x dx$ [$-\frac{1}{5}(\cos x)^5 + C$]
5. $\int \sin^4 x \cos x dx$ [$\frac{1}{5}(\sin x)^5 + C$]
6. $\int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$ [$2 \sin(\sqrt{x}) + C$]
7. $\int \frac{x^2}{1+x^2} dx$ [$x - \arctg x + C$]
8. $\int \frac{\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x^2} + 1}{\sqrt[4]{x}} dx$ [$\frac{4}{5}x^{\frac{5}{4}} - \frac{24}{17}x^{\frac{17}{12}} + \frac{4}{3}x^{\frac{3}{4}} + C$]
9. $\int (2^x + 3^x) dx$ [$\frac{2^x \ln(3) + 3^x \ln(2)}{\ln(2) \ln(3)} + C$]
10. $\int \max\{3, 2x^4\} dx$ (Pozor na spojitost primitivní funkce!) [TODO]
11. $\int \min\{x^3, x\} dx$ (Pozor na spojitost primitivní funkce!) [TODO]
12. $\int \sqrt{1 - \sin^2 x} dx$ (Pozor na spojitost primitivní funkce!) [TODO]

13. $\int \max\{1, x\} dx$ (Pozor na spojitost primitivní funkce!) $[x + C, \frac{x^2}{2} + D, C = -\frac{1}{2} + D]$
14. $\int \operatorname{tgh}^2 x dx$ $[x - \operatorname{tgh} x + C]$
15. $\int \operatorname{cotgh}^2 x dx$ $[x - \operatorname{cotgh} x + C]$
16. $\int \operatorname{cotg}^2 x dx$ $[-\operatorname{cotg} x - x + C]$
17. $\int x(1 - x^2)^6 dx$ $[-\frac{1}{14}(1 - x^2)^7 + C]$
18. $\int \sin^5 x \cos x dx$ $[\frac{1}{6}(\sin(x))^6 + C]$
19. $\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$ $[\operatorname{arctg} e^x + C]$
20. $\int \frac{dx}{x(\ln x + 3)}$ $[\ln(\ln(x) + 3) + C]$
21. $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2 + 1} dx$ $[\frac{1}{2}(\operatorname{arctg}(x))^2 + C]$
22. $\int \cos^4 x dx$ $[\frac{1}{4}(\cos(x))^3 \sin(x) + \frac{3}{8} \cos(x) \sin(x) + \frac{3}{8} x + C]$
23. $\int \cos^3 x dx$ $[\frac{1}{3}(\cos(x))^2 \sin(x) + \frac{2}{3} \sin(x) + C]$
24. $\int \sin^6 x dx$ $[-\frac{1}{6}(\sin(x))^5 \cos(x) - \frac{5}{24}(\sin(x))^3 \cos(x) - \frac{5}{16} \cos(x) \sin(x) + \frac{5}{16} x + C]$
25. $\int \sqrt{x} \ln x dx$ $[\frac{2}{3} x^{3/2} \ln(x) - \frac{4}{9} x^{3/2} + C]$
26. $\int \operatorname{arctg} x dx$ $[x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) + C]$
27. $\int x \operatorname{arctg} x dx$ $[\frac{1}{2} x^2 \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + C]$
28. $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - 3x^2}}$ $[\frac{\sqrt{3}}{3} \arcsin(\sqrt{3}x) + C]$
29. $\int \frac{dx}{\sqrt{7 + x - x^2}}$ $[\arcsin(\frac{2\sqrt{29}}{29}(x - \frac{1}{2})) + C]$
30. $\int \frac{5x + 1}{\sqrt{3 - x^2}} dx$ $[-5\sqrt{3 - x^2} + \arcsin(\frac{\sqrt{3}}{3}x) + C]$
31. $\int \sqrt{5 + x - x^2} dx$ $[-\frac{1}{4}(1 - 2x)\sqrt{5 + x - x^2} + \frac{21}{8} \arcsin(\frac{2\sqrt{21}}{21}(x - \frac{1}{2})) + C]$
32. $\int \frac{x^2 + 5x}{x^2 - 1} dx$ $[x + 3 \ln(x - 1) + 2 \ln(x + 1) + C]$

33. $\int \operatorname{tg} x \, dx$ $[-\ln(\cos(x)) + C]$
34. $\int \frac{\ln^2 x}{x^2} \, dx$ $[-\frac{(\ln(x))^2}{x} - 2\frac{\ln(x)}{x} - 2x^{-1} + C]$
35. $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$ $[-\sqrt{1-x^2} + C]$
36. $\int \cos^5 x \sqrt{\sin x} \, dx$ $[\frac{2}{231} (\sin(x))^{3/2} (32 + 21(\cos(x))^4 + 24(\cos(x))^2) + C]$
37. $\int \frac{\cos 3x}{2 + \sin 3x} \, dx$ $[\frac{1}{3} \ln(2 + \sin(3x)) + C]$
38. Nalezněte $f(x)$, znáte-li: $f''(x) = \cos x$, $f'(0) = 1$, $f(0) = 2$. $[f(x) = x - \cos x + 3]$
39. $\int \frac{(1-x)^3}{x\sqrt[3]{x}} \, dx$ $[3x^{-1/3}(-1 - \frac{3}{2}x + \frac{3}{5}x^2 + \frac{1}{8}x^3) + C]$
40. $\int \frac{e^{3x} + 1}{e^x + 1} \, dx$ $[\frac{e^{2x}}{2} - e^x + x + C]$
41. $\int (x + |x|)^2 \, dx$ $[\frac{2}{3}(x^3 + |x^3|) + C]$
42. $\int \frac{x}{(x^2 - 1)^{3/2}} \, dx$ $[-\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} + C]$
43. $\int \frac{x}{4 + x^4} \, dx$ $[\frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{x^2}{2} + C]$
44. $\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^3 x}} \, dx$ $[\frac{2}{\sqrt{\cos x}} + C]$
45. $\int x e^{-x^2} \, dx$ $[-\frac{1}{2} e^{-x^2} + C]$
46. $\int \frac{\ln^2 x}{x} \, dx$ $[\frac{\ln^3 x}{3} + C]$
47. $\int \frac{\ln x}{x\sqrt{1 + \ln x}} \, dx$ $[\frac{2}{3} \sqrt{1 + \ln x} (\ln x - 2) + C]$
48. $\int \frac{1}{\sin^2 x (1 + \operatorname{tg} x)} \, dx$ $[\ln|1 + \operatorname{cotg} x| - \operatorname{cotg} x + C]$
49. $\int \frac{\sin x \cos^3 x}{1 + \cos^2 x} \, dx$ $[-\frac{1}{2} \cos^2 x + \frac{1}{2} \ln(1 + \cos^2 x) + C]$
50. $\int \sqrt{x} \ln^2 x \, dx$ $[\frac{2}{27} x^{3/2} (9 \ln^2 x - 12 \ln x + 8) + C]$
51. $\int x \sinh x \, dx$ $[x \cosh x - \sinh x + C]$
52. $\int x^2 \arccos x \, dx$ $[\frac{1}{3} x^3 \arccos x + \frac{1}{9} (1 - x^2)^{3/2} - \frac{1}{3} (1 - x^2)^{1/2} + C]$

53. $\int \operatorname{arctg} \sqrt{x} \, dx$ [$x \operatorname{arctg} \sqrt{x} + \operatorname{arctg} \sqrt{x} - \sqrt{x} + C$]
54. $\int \frac{\ln \sin x}{\sin^2 x} \, dx$ [$-\cotg x \ln \sin x - \cotg x - x + C$]
55. $\int x e^{-x} \, dx$ [$-x e^{-x} - e^{-x} + C$]
56. $\int x^2 e^{-x} \, dx$ [$-e^{-x}(x^2 + 2x + 2) + C$]
57. $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x}} \, dx$ [$-2x^2(1-x)^{1/2} - \frac{8}{3}x(1-x)^{3/2} - \frac{16}{15}(1-x)^{5/2} + C$]
58. $\int x \ln \sqrt{x} \, dx$ [$\frac{1}{4}x^2 \ln x - \frac{1}{8}x^2 + C$]
59. $\int \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x+1}} \, dx$ [$2\sqrt{x+1} \ln(x+1) - 4\sqrt{x+1} + C$]
60. $\int \ln^2 x \, dx$ [$x \ln^2 x - 2x \ln x + 2x + C$]
61. $\int x^3 3^x \, dx$ [$3^x (\frac{x^3}{\ln 3} - \frac{3x^2}{\ln^2 3} + \frac{6x}{\ln^3 3} - \frac{6}{\ln^4 3}) + C$]
62. $\int x^3 \sin x^2 \, dx$ [$-\frac{1}{2}x^2 \cos x^2 + \frac{1}{2} \sin x^2 + C$]
63. $\int \ln(1+x^2) \, dx$ [$x \ln(1+x^2) - 2x + 2 \operatorname{arctg} x + C$]
64. $\int \cotg(\pi - x) \, dx$ [$-\ln|\sin(x)| + C$]
65. $\int \cotg x \ln(\sin x) \, dx$ [$\frac{1}{2}(\ln \sin x)^2 + C$]
66. $\int \frac{1}{\cos^2 x(9 + \operatorname{tg}^2 x)} \, dx$ [$\frac{1}{3} \operatorname{arctg} (\frac{1}{3} \operatorname{tg} x) + C$]
67. $\int \frac{1}{\cos^2 x \sqrt{9 - \operatorname{tg}^2 x}} \, dx$ [$\operatorname{arcsin} (\frac{1}{3} \operatorname{tg} x) + C$]
68. $\int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} \, dx$ [$2 \operatorname{arcsin}(\frac{x}{2}) - \frac{1}{2}x\sqrt{4-x^2} + C$]
69. $\int \frac{x}{(1-x^2)^{3/2}} \, dx$ [$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + C$]
70. $\int x\sqrt{4-x^2} \, dx$ [$-\frac{1}{3}(4-x^2)^{3/2} + C$]
71. $\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}}$ [$\frac{1}{a} \ln \left| \frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x} \right| + C$]

72. $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{a^2 + x^2}}$ $[-\frac{1}{a^2 x} \sqrt{a^2 + x^2} + C]$
73. $\int \frac{dx}{e^x \sqrt{e^{2x} - 9}}$ $[\frac{1}{9} e^{-x} \sqrt{e^{2x} - 9} + C]$
74. $\int x \sqrt{6x - x^2 - 8} dx$ $[-\frac{1}{3}(6x - x^2 - 8)^{3/2} + \frac{3}{2} \arcsin(x - 3) + \frac{3}{2} \sqrt{6x - x^2 - 8} + C]$
75. $\int \frac{x}{(x^2 + 2x + 5)^2} dx$ $[\frac{x^2 + x}{8(x^2 + 2x + 5)} - \frac{1}{16} \operatorname{arctg}(\frac{x+1}{2}) + C]$
76. $\int \frac{x + 3}{\sqrt{x^2 + 4x + 13}} dx$ $[\sqrt{x^2 + 4x + 13} + \ln(x + 2 + \sqrt{x^2 + 4x + 13}) + C]$
77. $\int \sqrt{6x - x^2 - 8} dx$ $[\frac{1}{2}(x - 3)\sqrt{6x - x^2 - 8} + \frac{1}{2} \arcsin(x - 3) + C]$
78. $\int x^2 \arcsin x dx$ $[\frac{1}{3} x^3 \arcsin x + \frac{1}{3}(1 - x^2)^{1/2} - \frac{1}{9}(1 - x^2)^{3/2} + C]$
79. $\int \frac{3}{\sqrt{2 - 3x - 4x^2}} dx$ $[\frac{3}{2} \arcsin(\frac{8x+3}{\sqrt{41}}) + C]$
80. $\int \frac{x^2}{\sqrt{3 - 2x - x^2}} dx$ $[-\frac{1}{2} x \sqrt{3 - 2x - x^2} + \frac{3}{2} \sqrt{3 - 2x - x^2} + 3 \arcsin(\frac{x+1}{x}) + C]$
81. $\int \frac{\operatorname{arctg}(\ln x)}{x} dx$ $[\ln x \operatorname{arctg} \ln x - \frac{1}{2} \ln(\ln^2 x + 1) + C]$
82. $\int \sqrt{\frac{1 + x^2}{(1 - x^4) \arcsin x}} dx$ $[2 \sqrt{\arcsin x} + C]$
83. $\int \operatorname{arctg} \sqrt{x^2 - 1} dx$ $[x \operatorname{arctg} \sqrt{x^2 - 1} - \operatorname{argcosh} x + C]$
84. $\int \cos x \sin^5(x) dx$ $[\frac{1}{6} \sin^6(x) + C]$
85. $\int \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x}{\sin(2x)} dx$ $[-\operatorname{cotg}(2x) + C]$
86. Nalezněte všechny funkce, které mají tu vlastnost, že $f''(x) = e^x + 1$.
 $[f(x) = e^x + Cx + D + \frac{1}{2}x^2]$
87. $\int x 2^{x^2+1} dx$ $[2^{x^2} / \ln 2 + C]$
88. Nalezněte primitivní funkci k funkci $f(x) = \frac{x}{4 + x^4}$. $[\frac{1}{4} \operatorname{arctg}(\frac{1}{2}x^2) + C]$
89. Nalezněte všechny funkce f , které mají tu vlastnost, že $f''(x) = e^x + \frac{1}{x^2}$.
 $[f(x) = e^x + Cx + D - \ln x]$
90. Nalezněte $f(x)$, znáte-li $f'(x) = 2x - 1; f(3) = 4$. $[x^2 - x - 2]$

91. Nalezněte $f(x)$, znáte-li $f''(x) = \cos x; f'(0) = 1; f(0) = 2$. [$x - \cos x + 3$]
92. Nalezněte $f(x)$, znáte-li $f''(x) = 6x - 2; f'(0) = 1; f(0) = 2$. [$x^3 - x^2 + x + 2$]
93. Nalezněte $f(x)$, znáte-li $f''(x) = 2x - 3; f(2) = -1; f(0) = 3$. [$\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} - \frac{x}{3} + 3$]
94. $\int \frac{t}{(4t^2 + 9)^2} dt$ [$-\frac{1}{8(4t^2+9)} + C$]
95. $\int x^{-\frac{1}{2}} \sin(x^{\frac{1}{2}}) dx$ [$-2 \cos(x^{1/2}) + C$]
96. $\int \sin^2 3x dx$ [$\frac{1}{2}x - \frac{1}{12} \sin 6x + C$]
97. $\int \frac{\sqrt{x}}{1 + x\sqrt{x}} dx$ [$\frac{2}{3} \ln |1 + x\sqrt{x}| + C$]
98. $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx$ [$-e^{\frac{1}{x}} + C$]
99. $\int \frac{\log_2 x^3}{x} dx$ [$\frac{3}{\ln 4} (\ln x)^2 + C$]
100. $\int \frac{\cos^2 x^2 + \ln^2 x^2 + \sin^2 x^2}{x} dx$ [$\ln |x| + \frac{4}{3} \ln^3 |x| + C$]

6 Určité Integrály

Zkouškové příklady

$$1. \int_{-1}^1 2x(x^2 + 1) dx \quad [0]$$

$$2. \int_0^{\sqrt{3}} \frac{2x^2 + 1}{\sqrt{3 - x^2}} dx \quad [2\pi]$$

$$3. \int_{-1}^1 \sqrt{3 - x^2} dx \quad [\sqrt{2} + 3 \arcsin \frac{\sqrt{3}}{3}]$$

$$4. \int_1^2 \frac{6x^2 - 2}{x^3 - x + 1} dx \quad [2 \ln 7]$$

$$5. \int_0^1 \arccos x dx \quad [1]$$

$$6. \int_0^{2\pi} x^2 \cos x dx \quad [4\pi]$$

$$7. \int_0^{\sqrt{3}} x \operatorname{arctg} x dx \quad [\frac{2}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}]$$

$$8. \int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{x^5}{\sqrt{1 - x^2}} dx \quad [\frac{53}{480}]$$

$$9. \int_{-1}^1 \frac{r}{(1 + r^2)^4} dr \quad [0]$$

$$10. \int_0^a y \sqrt{a^2 - y^2} dy \quad [\frac{1}{3}|a|^3]$$

$$11. \int_{-a}^0 y^2 (1 - \frac{y^3}{a^3})^{-2} dy \quad [\frac{a^3}{6}]$$

$$12. \int_0^1 \frac{x + 3}{\sqrt{x + 1}} dx \quad [\frac{16}{3}\sqrt{2} - \frac{14}{3}]$$

13. $\int_{-1}^0 x^3(x^2 + 1)^6 dx$ [$-\frac{769}{112}$]
14. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos x dx$ [$\frac{1}{4}$]
15. $\int_0^{2\pi} \cos^2 x dx$ [π]
16. $\int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{x+1} dx$ [$\frac{1}{2}(\ln 2)^2$]
17. $\int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{e^x + 1} dx$ [$\ln \frac{3}{2}$]
18. $\int_1^2 2^{-x} dx$ [$\frac{1}{4 \ln 2}$]
19. $\int_{10}^{100} \frac{dx}{x \log_{10} x}$ [$\ln 2 \ln 10$]
20. $\int_0^1 x 10^{1+x^2} dx$ [$\frac{45}{\ln 10}$]
21. $\int_0^{\ln \frac{\pi}{4}} e^x \frac{1}{\cos e^x} dx$ [$\ln \left((1 + \sqrt{2}) \left(\frac{1}{\cos 1} + \frac{\pi}{4} \right) \right)$]
22. $\int_0^5 \frac{dx}{25 + x^2}$ [$\frac{\pi}{20}$]
23. $\int_0^{3/2} \frac{dx}{9 + 4x^2}$ [$\frac{\pi}{24}$]
24. $\int_{-3}^{-2} \frac{dx}{\sqrt{4 - (x+3)^2}}$ [$\frac{\pi}{6}$]
25. $\int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{1 + e^{2x}} dx$ [$\arctg 2 - \frac{\pi}{4}$]

26. $\int_0^{\pi} \cos^4 x \, dx$ [$\frac{3}{8}\pi$]
27. $\int_0^{2\pi} \sin^3 x \cos x \, dx$ [0]
28. $\int_0^{\frac{3}{2}\pi} \cos^2 x \, dx$ [$\frac{3}{4}\pi$]
29. $\int_3^8 \frac{\ln x}{x} \, dx$ [$-\frac{1}{2} \ln^2(3) + \frac{9}{2} \ln^2(2)$]
30. $\int_0^{\ln 2} e^x \, dx$ [1]
31. $\int_0^1 e^x (e^x + 1)^{\frac{1}{5}} \, dx$ [$\frac{5}{6} [(e + 1)^{\frac{6}{5}} - 2^{\frac{6}{5}}]$]
32. $\int_{\pi/4}^{3/4\pi} \operatorname{cotg} x \, dx$ [0]
33. $\int_0^{\pi/8} \frac{1}{\cos(2x)} \, dx$ [$-\frac{1}{4} \ln(2) + \frac{1}{2} \ln(2 + \sqrt{2})$]
34. $\int_{-2}^1 \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \, dx$ [$-\sqrt{5} + \sqrt{2}$]
35. $\int_1^{\sqrt{2}} x(x^2 - 1)^7 \, dx$ [$\frac{1}{16}$]
36. $\int_{-1}^1 y(y + 1)^{\frac{1}{2}} \, dy$ [$\frac{4}{15}\sqrt{2}$]
37. $\int_0^1 3x^2(x^3 + 1) \, dx$ [$\frac{3}{2}$]
38. $\int_0^1 t^2(1 - t^3)^8 \, dt$ [$\frac{1}{27}$]

$$39. \int_0^1 \frac{r}{(1+r^2)^4} dr \quad \left[\frac{7}{48}\right]$$

$$40. \int_0^{2\pi} \sin |x - \pi| dx \quad [4]$$

$$41. \int_0^1 x \operatorname{arctg} x dx \quad \left[\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right]$$

$$42. \int_0^{\pi} \sin(x + \pi) dx \quad [-2]$$

$$43. \int_0^1 \ln(x + 1) dx \quad [2 \ln 2 - 1]$$

7 Aplikace integrálů

Rozcvička

V této krátké části jsou příklady, které pro svou vyšší náročnost nebudou ve zkouškové písemce, a tudíž nejsou číslovány.

- Spočítejte povrch toru (duše) $x^2 + (y - b)^2 = a^2; b \geq a$ [$4\pi^2 ab$]

Zkouškové příklady

7.1 Výpočet plochy

1. Nechť je dána funkce $f(x) = \sin(x) \cos\left(\frac{x}{2}\right)$ na intervalu $[-\pi, \pi]$. Jaká je plocha pod touto funkcí na intervalu $[0, \pi]$? [$\frac{4}{3}$]
2. Spočítejte plochu mezi osou x a grafem funkce $f(x) = 2 + x^3; x \in [0, 1]$. [$\frac{9}{4}$]
3. Spočítejte plochu mezi osou x a grafem funkce $f(x) = (2x^2 + 1)^2; x \in [0, 1]$. [$\frac{47}{15}$]
4. Spočítejte plochu mezi osou x a grafem funkce $f(x) = \sin x; x \in \left[\frac{1}{3}\pi, \frac{1}{2}\pi\right]$. [$\frac{1}{2}$]
5. Spočítejte plochu mezi osou x a grafem funkce $f(x) = x\sqrt{2x^2 + 1}; x \in [0, 2]$. [$\frac{13}{3}$]
6. Spočítejte plochu mezi osou x a grafem funkce $f(x) = x^{-3}(1 + x^{-2})^{-3}; x \in [1, 2]$. [$\frac{39}{400}$]
7. Spočítejte plochu sevřenou mezi grafy $y = \sqrt{x}$ a $y = x^2$. [$\frac{1}{3}$]
8. Spočítejte plochu sevřenou mezi grafy $y = x^2$ a $y = 4x - 3$. [$\frac{4}{3}$]
9. Spočítejte plochu sevřenou mezi grafy $y = x$ a $x^3 - 10y^2 = 0$. [10]
10. Spočítejte plochu sevřenou mezi grafy $y = x, y = 2x$ a $y = 4$. [4]
11. Spočítejte plochu sevřenou mezi grafy $y = \cos x$ a $y = 4x^2 - \pi^2$. [$2 + \frac{2}{3}\pi^3$]
12. Spočítejte plochu sevřenou mezi grafy $y = \cos^2(\pi x)$ a $y = \sin^2(\pi x)$ pro $x \in [0, \frac{1}{4}]$. [$\frac{1}{2\pi}$]
13. Spočítejte plochu sevřenou mezi grafy $y = 2^x, y = 2$ a $x = 0$. [$2 - \frac{1}{\ln 2}$]
14. Spočítejte plochu sevřenou mezi grafy $y = (x + 1)^2$ a $x = \sin(\pi y)$ pro $y \in [0, 1]$. [$\frac{1}{3} + \frac{2}{\pi}$]
15. Spočítejte plochu sevřenou mezi grafy $y = x$ a $y = x + \sin^2 x$ pro $x \in [0, \pi]$. [$\frac{\pi}{2}$]

7.2 Výpočet těžiště

16. Určete souřadnice těžiště oblasti vymezené grafy $y = \sqrt{x^2(1 - x^2)}$ a $y = 0$. [$\bar{x} = \frac{3}{16}\pi, \bar{y} = \frac{1}{5}$]
17. Určete souřadnice těžiště oblasti vymezené grafy $y = \frac{4}{x^2}$ a $y = 0$ pro $x \in [1, 3]$. [$\bar{x} = \frac{3}{2} \ln 3, \bar{y} = \frac{26}{27}$]
18. Určete souřadnice těžiště oblasti vymezené grafy $y = 1 + x^4$ a $y = 0$ pro $x \in [0, 1]$. [$\bar{x} = \frac{5}{9}, \bar{y} = \frac{17}{27}$]

19. Určete souřadnice těžiště oblasti vymezené grafy $y = \sqrt{1-x^2}$ a $y = 0$ pro $x \in [-1, 0]$.

$$[\bar{x} = -\frac{4}{3\pi}, \bar{y} = \frac{4}{3\pi}]$$

7.3 Výpočet délky grafu funkce

20. Jaká je délka grafu funkce $f(x) = \sqrt{x(1-x)}$? [$\frac{\pi}{2}$]

21. Pomocí funkce $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ a integrálního počtu spočítejte obvod kruhu o poloměru R .

22. Spočtěte délku křivky $f(x) = x\sqrt{x}$, $x \in [0, 4]$. [$\frac{80}{27}\sqrt{10} - \frac{8}{27}$]

23. Spočtěte délku grafu $y = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right)$, kde $x \in [0, b]$. [$a \sinh \frac{b}{a}$]

24. Spočtěte délku grafu $x = \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2} \ln y$, kde $y \in [1, e]$. [$\frac{e^2+1}{4}$]

25. Spočtěte délku grafu $y = a \ln \frac{a^2}{a^2-x^2}$, kde $x \in [0, b]$ a $b < a$. [$a \ln \frac{a+b}{a-b} - b$]

26. Spočtěte délku grafu $y = \ln \cos x$, kde $x \in [0, a]$ a $a < \frac{\pi}{2}$. [$\ln |\tan(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2})|$]

27. Spočtěte délku grafu $y = 2a \ln \frac{\sqrt{a+\sqrt{x}}}{\sqrt{a-\sqrt{x}}} - 4\sqrt{ax}$, kde $x \in [0, b]$ a $b > 0$. [$2a \ln \frac{a}{a-b} - b$]

28. Spočtěte délku grafu $x = a \ln \frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y} - \sqrt{a^2-y^2}$, kde $y \in [b, a]$ a $0 < b < a$. [$a \ln \frac{a}{b}$]

7.4 Výpočet objemu rotačního tělesa

29. Spočítejte objem rotačního tělesa, které vznikne rotací oblasti ohraničené $y = 2x - x^2$ a $y = 0$ kolem osy x . [$\frac{16}{15}\pi$]

30. Spočtěte objem tělesa, které vznikne rotací plochy sevřené grafy $y = x^2$ a $y = 9$ okolo osy x . [$\frac{1944}{5}\pi$]

31. Spočtěte objem tělesa, které vznikne rotací plochy sevřené grafy $y = x^3$, $xy = 10$ a $y = 1$ okolo osy x . [$(\frac{80}{7}10^{\frac{3}{4}} - \frac{134}{7})\pi$]

32. Spočtěte objem tělesa, které vznikne rotací plochy sevřené grafy $y = \sqrt{4-x^2}$ a $y = 0$ okolo osy x . [$\frac{32}{3}\pi$]

33. Spočtěte objem tělesa, které vznikne rotací plochy sevřené grafy $y = x$ a $y = 2x - x^3$ okolo osy x . [$\frac{12}{35}\pi$]

34. Spočtěte objem tělesa, které vznikne rotací plochy sevřené grafy $y = \frac{1}{1+x^2}$, $y = 0$ a $x \in [-1, 1]$ okolo osy x . [$\frac{\pi}{4}(\pi+2)$]

35. Spočtěte objem tělesa, které vznikne rotací plochy sevřené grafy $y = \cos x$, $y = 2 \cos x$, $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ okolo osy x . [$\frac{3}{2}\pi^2$]

36. Spočtěte objem tělesa, které vznikne rotací plochy sevřené grafy $y = e^x - 1$, $y = 2$ a $x = 0$ okolo osy x . [$\pi \ln 3$]

37. Spočtěte objem tělesa, které vznikne rotací plochy sevřené grafy $x = y^3$, $x = 8$, $y = 0$ okolo osy y . [$\frac{768}{7}\pi$]

38. Spočítejte objem tělesa, které vznikne rotací plochy sevřené grafy $y = \sqrt{x}$ a $y = x^3$ okolo osy y . $[\frac{2}{5}\pi]$
39. Spočítejte objem tělesa, které vznikne rotací plochy sevřené grafy $x = y^2$ a $x = 2 - y^2$ okolo osy y . $[\frac{10}{3}\pi]$
40. Spočítejte objem tělesa, které vznikne rotací plochy sevřené grafy $y^3 - y = x$ a $x = 0$ okolo osy y . $[\frac{16}{105}\pi]$
41. Spočítejte objem tělesa, které vznikne rotací plochy sevřené grafy $y = \cos x$, $y = 2 \cos x$, $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ okolo osy x . $[\frac{3}{2}\pi^2]$
42. Spočítejte objem tělesa, které vznikne rotací plochy sevřené grafy $y = \cos x$, $y = 2 \cos x$, $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ okolo osy y . $[\pi^2 - 2\pi]$

7.5 Výpočet povrchu rotačního tělesa

43. Pomocí funkce $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ a integrálního počtu spočítejte objem a povrch koule o poloměru R . $[V = \frac{4}{3}\pi R^3, P = 4\pi R^2.]$
44. Pomocí integrálního počtu a vhodně zvolené funkce spočítejte objem a povrch pláště kužele o výšce a a poloměru podstavy r . $[V = \frac{\pi r^2 a}{3}, P = \pi r \sqrt{a^2 + r^2}]$
45. Spočítejte povrch rotačního tělesa, které vznikne rotací grafu $y = \sin x$ a $x \in [0, \pi]$ okolo osy x . $[2\pi(\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2}))]$
46. Spočítejte povrch rotačního tělesa, které vznikne rotací grafu $y = \frac{1}{x}$, $x \in [\frac{1}{2}, 2]$ okolo osy x . $[\frac{3}{8}\sqrt{17} + \ln 2 + \frac{1}{2} \ln \frac{4 + \sqrt{17}}{1 + \sqrt{17}}]$
47. Spočítejte povrch rotačního tělesa, které vznikne rotací grafu $y = e^x$ a $x \in [-\ln 2, \ln 2]$ okolo osy x . $[\pi(\frac{7}{4}\sqrt{5} + \ln \frac{4 + 2\sqrt{5}}{1 + \sqrt{5}})]$
48. Spočítejte povrch rotačního tělesa, které vznikne rotací grafu $y^2 + 4x = 2 \ln y$, $y \in [1, 2]$ okolo osy y . $[\frac{\pi}{16}(4 \ln^2 2 + 16 \ln 2 - 27)]$
49. Spočítejte povrch rotačního tělesa, které vznikne rotací grafu $y = a \cos \frac{\pi x}{2b}$, $x \in [-b, b]$ okolo osy x . $[2a\sqrt{\pi^2 a^2 + 4b^2} + \frac{8}{\pi} b^2 \ln \frac{\pi a + \sqrt{\pi^2 a^2 + 4b^2}}{2b}]$
50. Spočítejte povrch rotačního tělesa, které vznikne rotací grafu $y^2 = 2px$, $x \in [0, b]$ okolo osy x . $[\frac{2}{3}\pi((2b + p)\sqrt{2bp + p^2} - p^2)]$
51. Spočítejte povrch rotačního tělesa, které vznikne rotací grafu $y^2 = 2px$, $x \in [0, b]$ okolo osy y . $[\frac{\pi}{4}((p + 4b)\sqrt{2b(p + 2b)} - p^2 \ln \frac{\sqrt{2b} + \sqrt{p + 2b}}{\sqrt{p}})]$
52. Spočítejte povrch rotačního tělesa, které vznikne rotací grafu $y = \cosh x$, $x \in [0, \ln 2]$ okolo osy x .

Reference

- [1] Mareš J., Vondráčková J., *Cvičení z matematické analýzy: Diferenciální počet*, Vydavatelství ČVUT, 1999
- [2] Pelantová E., Vondráčková J., *Cvičení z matematické analýzy: Integrální počet a řady*, Vydavatelství ČVUT, 1998

[3] Marsden J., Weinstein A., *Calculus II*, Springer, 1985