

Matematika I

Ing. Radek Fučík, Ph.D.
WikiSkriptum (studentská verze)

verze: 4. července 2024

Obsah

1	Úvod	4
1.1	Množiny	4
1.2	Výroky	4
1.3	Číselné množiny	5
1.4	Důkaz matematickou indukcí	6
1.5	Intervaly	6
1.6	Omezenost množin	7
1.7	Absolutní hodnota	7
2	Funkce	8
2.1	Definice	8
2.2	Základní funkce	8
2.3	Algebraické kombinace funkcí	9
2.4	Prostá a inverzní funkce	9
2.5	Parita	10
2.6	Obraz, vzor	10
3	Limita funkce	10
3.1	Definice	10
3.2	Vlastnosti limity	11
3.3	Jednoznačnost limity	11
3.4	Nekonečné limity	12
3.5	Věta o limitě sevřené funkce	13
3.6	Goniometrické limity	13
3.7	Asymptota funkce	14
4	Spojitost funkce	14
4.1	Definice	14
4.2	Vlastnosti spojitých funkcí	15
5	Derivace funkce	16
5.1	Definice	16
5.2	Pravidla pro derivování	16
5.3	Derivace složené funkce	18
5.4	Derivace inverzní funkce	18
5.5	Tečna a normála	19
5.6	Derivace cyklometrických funkcí	19
5.6.1	Funkce arcsin	19
5.6.2	Funkce arccos	20
5.6.3	Funkce arctg	20
5.6.4	Funkce arccotg	21
6	Užití derivace k vyšetřování funkce	22
6.1	Věty o přírůstku funkce	22
6.2	Monotonie	23
6.3	Lokální a globální extrémy	23
6.4	Test extrému dle 1. derivace	24
6.5	Test extrému dle 2. derivace	24
6.6	Konvexní a konkávní funkce	24

6.7	l'Hôpitalovo pravidlo	25
6.8	Vyšetřování průběhu funkce	25
7	Integrální počet	26
7.1	Primitivní funkce a neurčitý integrál	26
7.2	Určitý integrál	27
7.3	Vlastnosti určitého integrálu	30
8	Transcendentní funkce	31
8.1	Algebraické a transcendentní funkce	31
8.2	Logaritmická funkce	31
8.3	Přirozený logaritmus	32
8.4	Exponenciální funkce	32
8.5	Obecná mocnina	33
8.6	Obecná báze logaritmu	33
8.7	Hyperbolické funkce	34
8.8	Inverzní hyperbolické funkce	35
8.9	Pokročilé techniky integrace	36
8.10	Příklady	38
9	Aplikace integrálu	39
9.1	Výpočet plochy	39
9.2	Výpočet polohy těžiště	39
9.3	Délka grafu funkce	40
9.4	Objem a povrch rotačního tělesa	40
	Reference	41

1 Úvod

V této úvodní kapitole se seznámíme se základními matematickými pojmy, značením, operacemi s množinami a základy matematické logiky. Dále jsou zde stručně probrány číselné množiny, intervaly, pojem omezenosti množiny, horní hranice (závora) množiny a konečně význam absolutní hodnoty čísla.

1.1 Množiny

Definice 1.1 (Naivní definice množiny — Cantor 1873)

Soubor dobře definovaných a dobře rozlišitelných objektů se nazývá **množina**. Množiny zapisujeme ve tvaru

$$M = \{\text{prvek } x : \text{vlastnosti prvku } x\}.$$

Definice 1.2 (Operace s množinami)

Nechť A a B jsou nějaké množiny a x je prvek. Potom definujeme následující symboly:

$x \in A$	prvek x náleží množině A .
$x \notin A$	prvek x nenáleží množině A .
$A \subset B$	množina A je částí množiny B .
$A \cup B$	sjednocení množin A a B .
$A \cap B$	průnik množin A a B .
\emptyset	prázdná množina.
$A = \{x : V\}$	zápis množiny, která má prvky x , o kterých platí vlastnost V , např. $V : x > 0$.

Poznámka. Vlastnosti prázdné množiny \emptyset :

- $A \cup \emptyset = A$
- $A \cap \emptyset = \emptyset$

Příklad. Nechť $A = \{\varphi\}$, $B = \{\sigma, \varphi\}$, pak platí:

- $A \subset B$
- $A \cap B = \{\varphi\} = A$
- $A \cup B = \{\sigma, \varphi\} = B$

Definice 1.3 (Kartézský součin množin A a B)

$$A \times B = \{(x, y) : x \in A \text{ a } y \in B\}$$

1.2 Výroky

Definice 1.4 (Výrok)

Výrok je tvrzení, o kterém můžeme rozhodnout zda platí nebo neplatí.

Definice 1.5 (Přehled operací s výroky)

Nechť V_1 a V_2 jsou výroky. Potom definujeme následující značení:

V_1	výrok V_1 (platí).
$\neg V_1$	negace výroku V_1 (výrok V_1 neplatí).
$V_1 \wedge V_2$	konjunkce - platí V_1 a zároveň V_2 .
$V_1 \vee V_2$	disjunkce - platí V_1 nebo V_2 .
$V_1 \Rightarrow V_2$	implikace - když platí V_1 , pak platí V_2 .
$V_1 \Leftrightarrow V_2$	ekvivalence - V_1 platí právě tehdy, když platí V_2 .
\exists	existenční kvantifikátor - existuje aspoň jeden prvek ...
\exists_1 nebo $\exists!$	existenční kvantifikátor - existuje právě jeden prvek ...
\exists_∞	existenční kvantifikátor - existuje nekonečně prvků ...
\forall	kvantifikátor: pro všechny prvky ...

Poznámka. Výlučná disjunkce (exkluzivní disjunkce, non-ekvivalence): $(V_1 \vee V_2) \wedge \neg(V_1 \wedge V_2)$.

Definice 1.6 (Tabulka pravdivostních hodnot pro operace s výroky)

V následující tabulce **P** znamená platí a **N** neplatí:

V_1	V_2	$V_1 \wedge V_2$	$V_1 \vee V_2$	$V_1 \Rightarrow V_2$	$V_1 \Leftrightarrow V_2$
P	P	P	P	P	P
P	N	N	P	N	N
N	P	N	P	P	N
N	N	N	N	P	P

Lemma 1.7

Pravidla při negování výroků (z definice 1.6):

- $\neg(V_1 \vee V_2) = \neg V_1 \wedge \neg V_2$
- $\neg(V_1 \wedge V_2) = \neg V_1 \vee \neg V_2$
- $\neg(V_1 \Rightarrow V_2) = V_1 \wedge \neg V_2$
- $\neg(\exists x \in M) = \forall x \in M$
- $\neg(\forall x \in M) = \exists x \in M$

1.3 Číselné množiny

Definice 1.8 (Značení číselných množin)

Přirozená čísla \mathbb{N} ,	$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$.
Celá čísla \mathbb{Z} ,	$\mathbb{Z} = \{\dots - 3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$.
Racionální čísla \mathbb{Q} ,	$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z} ; q \in \mathbb{N}\}$.
Reálná čísla \mathbb{R} .	
Iracionální čísla $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.	
Komplexní čísla \mathbb{C} ,	$\mathbb{C} = \{a + ib : a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$.

Lemma 1.9 (Vlastnosti reálných čísel)

Nechť a, b, c jsou reálná čísla. Potom platí:

- $(a < b) \vee (a > b) \vee (a = b)$
- $(a < b) \wedge (b < c) \Rightarrow (a < c)$ transitivita
- $(a + b < a + c) \Rightarrow (b < c)$

4. $(a < b) \wedge (c > 0) \Rightarrow ac < cb$
 $(a < b) \wedge (c < 0) \Rightarrow ac > cb$

Věta 1.10 (O hustotě \mathbb{R})

Mezi libovolnými různými reálnými čísly je nekonečně mnoho racionálních a nekonečně mnoho iracionálních čísel.

Důsledek 1.11

Neexistuje nejmenší kladné reálné číslo.

Důkaz. Sporem. Principem důkazu sporem je ukázat, že negace tvrzení vede ke sporu. Matematická věta je obvykle zapsána pomocí implikace výroků

$$\text{Předpoklad} \Rightarrow \text{Tvrzení}, \quad (1)$$

přičemž podle pravidel negování výroku (Lemma 1.7) je její negace

$$\neg(\text{Předpoklad} \Rightarrow \text{Tvrzení}) = \text{Předpoklad} \wedge \neg\text{Tvrzení}, \quad (2)$$

Uvažujme následující slovní vyjádření výroku (ozn. V): *Není pravda, že by existovalo kladné reálné číslo, které by bylo menší než všechna ostatní reálná čísla (různá od tohoto čísla).* Kvantifikovaně lze výrok V vyjádřit takto:

$$V = \neg(\exists c \in \mathbb{R}, c > 0)(\forall r \in \mathbb{R}, r > 0, r \neq c)(c < r)$$

Tento výrok lze převést pomocí pravidel pro negování výrazů s \exists a \forall na výrok

$$V = (\forall c \in \mathbb{R}, c > 0)(\exists r \in \mathbb{R}, r > 0, r \neq c)(c \geq r),$$

které vyjadřuje ekvivalentní tvrzení *Pro všechna kladná reálná čísla c existuje aspoň jedno reálné číslo r takové, že je ostře menší než c .*

Pro důkaz sporem tedy předpokládejme, že platí negace výroku V , to jest

$$\neg V = (\exists c \in \mathbb{R}, c > 0)(\forall r \in \mathbb{R}, r > 0, r \neq c)(c < r)$$

Označme si toto nejmenší číslo, které nyní předpokládáme, že existuje, symbolem c_{min} . Potom ale podle věty 1.10 mezi čísly 0 a c_{min} existuje alespoň jedno číslo x tak, že $0 < x < c_{min}$. Tedy díky větě 1.10 snadno nalezneme kladné reálné číslo, které je menší než údajně nejmenší číslo c_{min} , což je **spor**. \square

1.4 Důkaz matematickou indukcí

Poznámka. Princip důkazu tvrzení $V[n]$ matematickou indukcí. Tvrzení $V[n]$ nazýváme **indukční předpoklad**.

1. **První krok.** Ověříme, že tvrzení platí pro nejnižší index, např. že $V[1]$ platí.
2. **Indukční krok $n \rightarrow n + 1$.** Za předpokladu, že platí $V[n]$, dokážeme platnost $V[n + 1]$.

1.5 Intervaly

Definice 1.12 (Interval)

Otevřený interval $(a, b) = \{ x \in \mathbb{R} : a < x < b \}$

Uzavřený interval $[a, b] = \{ x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b \}$

Polootevřený (polouzavřený) interval $[a, b) = \{ x \in \mathbb{R} : a \leq x < b \}$

Definice 1.13 (Nekonečno)

Pro symbol $+\infty$ platí, že $(\forall x \in \mathbb{R})(x < +\infty)$.

Pro symbol $-\infty$ platí, že $(\forall x \in \mathbb{R})(x > -\infty)$.

1.6 Omezenost množin

Definice 1.14 (Omezenost množiny)

Říkáme, že množina M je omezená shora $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} (\exists h \in \mathbb{R})(\forall x \in M)(x \leq h)$.

Říkáme, že množina M je omezená zdola $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} (\exists d \in \mathbb{R})(\forall x \in M)(x \geq d)$.

Říkáme, že množina M je omezená $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ je omezená shora i zdola.

Říkáme, že množina M je neomezená $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ není omezená shora ani zdola.

Definice 1.15 (Závora množiny)

Číslo h , resp. d z definice 1.14 nazýváme horní, resp. dolní závora (hranice) množiny M .

1.7 Absolutní hodnota

Definice 1.16 (Absolutní hodnota)

Absolutní hodnota čísla $x \in \mathbb{R}$ je

$$|x| = \begin{cases} x & \text{pro } x \geq 0 \\ -x & \text{pro } x < 0 \end{cases}.$$

Poznámka. Platí $|x| = \max\{x, -x\}$ a hlavně $\sqrt{x^2} = |x|$.

Věta 1.17 (Trojúhelníková nerovnost $\triangle \neq$)

$$|a + b| \leq |a| + |b|.$$

Důkaz. Platí:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \leq |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 = (|a| + |b|)^2,$$

kde po odmocnění levé a pravé strany nerovnosti dostáváme

$$|a + b| \leq ||a| + |b|| = |a| + |b|.$$

□

Důsledek 1.18

$$||a| - |b|| \leq |a - b|.$$

Důkaz.

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \geq |a|^2 - 2|a||b| + |b|^2 = (|a| - |b|)^2,$$

kde po odmocnění levé a pravé strany nerovnosti dostaneme tvrzení věty.

□

Věta 1.19 (Youngova nerovnost)

$$ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2).$$

Důkaz. Platí:

$$0 \leq (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2,$$

kde převedením prostředního členu z pravé strany na levou dostáváme

$$ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2),$$

což je tvrzení věty.

□

2 Funkce

2.1 Definice

Definice 2.1 (Funkce, definiční obor, obor hodnot)

Funkce f s **definičním oborem** D_f je předpis, který každému číslu $x \in D_f$ přiřadí právě jedno reálné číslo, které značíme $f(x)$. Množinu všech takto přiřazených čísel nazýváme **obor hodnot** a značíme H_f .

Definice 2.2 (Graf funkce)

Grafem funkce f je množina bodů v rovině (x,y) takových, že $x \in D_f$ a $y = f(x)$.

Věta 2.3

Množina \mathcal{F} je funkcí ve smyslu definice 2.1, právě tehdy, když pro všechny uspořádané dvojice čísel (x, y) platí:

$$((x, y) \in \mathcal{F} \wedge (x, z) \in \mathcal{F}) \Rightarrow y = z.$$

2.2 Základní funkce

Definice 2.4 (Polynom)

Polynom p je funkce definovaná jako

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0 x^0 = \sum_{k=0}^n a_k x^k,$$

kde a_k jsou komplexní čísla pro všechny indexy $k = 0, 1, \dots, n$. Pokud a_n je nejvyšší nenulový koeficient polynomu (tj. $a_k = 0$ pro všechna $k > n$), říkáme, že takový polynom má stupeň n . Definiční obor každého polynomu je $D_p = \mathbb{C}$, obor hodnot závisí na každé konkrétní volbě koeficientů a_k .

Poznámka. My budeme uvažovat výhradně polynomy reálné, tj. $a_k \in \mathbb{R}$ pro $\forall k = 0, 1, \dots, n$, a s $D_p = \mathbb{R}$.

Poznámka.

- Nulový polynom: $p(x) = 0$.
- Polynom 0. stupně: $p(x) = K$, kde $K \neq 0$.
- Polynom 1. stupně se nazývá *lineární* polynom.
- Polynom 2. stupně se nazývá *kvadratický* polynom.
- Polynom 3. stupně se nazývá *kubický* polynom.
- Polynom 4. stupně se nazývá *bikvadratický* polynom.

Definice 2.5 (Kořen polynomu)

Bod $x_0 \in \mathbb{R}$ takový, že $p(x_0) = 0$, nazýváme kořenem (též nulovým bodem) polynomu p .

Věta 2.6 (Základní věta algebry)

Každý polynom stupně alespoň prvního má v \mathbb{C} alespoň jeden kořen.

Věta 2.7

Každý polynom stupně n má nejvýše n kořenů.

Poznámka. Dalšími základními funkcemi jsou:

- Odmocnina \sqrt{x} , $D_{\sqrt{\cdot}} = \mathbb{R}_0^+$, $H_{\sqrt{\cdot}} = \mathbb{R}_0^+$
- Racionální funkce $\frac{1}{x}$, $D_{\frac{1}{\cdot}} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $H_{\frac{1}{\cdot}} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
- Absolutní hodnota $|x|$, $D_{|x|} = \mathbb{R}$, $H_{|x|} = \mathbb{R}_0^+$
- Funkce signum $\text{sign } x = \begin{cases} 1 & \text{pro } x > 0 \\ 0 & \text{pro } x = 0 \\ -1 & \text{pro } x < 0 \end{cases}$

2.3 Algebraické kombinace funkcí

Definice 2.8 (Algebraické kombinace funkcí)

Nechť f je funkce s definičním oborem D_f a g je funkce s definičním oborem D_g , nechť $D_f = D_g$. Pak lze definovat následující nové funkce:

- $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
- $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$
- $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$
- $g(x) \neq 0 \forall x \in D_g : \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

Definice 2.9 (Skládání funkcí)

Nechť $(\forall x \in D_g)(g(x) \in D_f)$, pak $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.

Poznámka. Skládání funkcí není komutativní, tj. obecně $f \circ g \neq g \circ f$.

2.4 Prostá a inverzní funkce

Definice 2.10 (Prostá funkce)

Funkce f je **prostá**, právě když neexistují dva různé body z D_f na kterých by f nabývala stejné hodnoty. Tj. $(\forall x_1, x_2 \in D_f)(f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2)$.

Věta 2.11 (O existenci a jednoznačnosti inverzní funkce)

Je-li funkce f prostá, pak **existuje právě jedna** funkce g s definičním oborem $D_g = H_f$ taková, že $f(g(x)) = x$ pro $\forall x \in D_g$.

Důkaz. Pro dané $y \in H_f$ existuje díky prostotě f právě jedno $x \in D_f$ tak, že $y = f(x)$. Toto x označíme $g(y) := x$ a dostaneme jednoznačný předpis $g : y \mapsto x$, který vyhovuje definici funkce. \square

Definice 2.12 (Inverzní funkce)

Funkci g z předchozí věty značíme $g = f^{-1}$ a nazýváme funkci **inverzní** k funkci f .

Věta 2.13

Funkce f^{-1} je inverzní k f právě tehdy, když $f^{-1} \circ f = \text{id}$ a $f \circ f^{-1} = \text{id}$.

Věta 2.14 (Inverze složené funkce)

$$(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}.$$

Důkaz. $f(g(x)) = y$, odkud $g(x) = f^{-1}(y)$ odkud $x = g^{-1}(f^{-1}(y))$. \square

2.5 Parita

Definice 2.15 (Parita funkce)

Nechť funkce f má definiční obor symetrický dle 0. Pak říkáme, že funkce f je

- **sudá** $\Leftrightarrow (\forall x \in D_f)(f(-x) = f(x))$.
- **lichá** $\Leftrightarrow (\forall x \in D_f)(f(-x) = -f(x))$.

2.6 Obraz, vzor

Definice 2.16 (Obraz množiny)

Obraz množiny M při zobrazení f je množina

$$f(M) = \{y : (\exists x \in M)(f(x) = y)\}.$$

Definice 2.17 (Vzor množiny)

Vzor množiny M při zobrazení f je množina

$$f^{-1}(M) = \{x : (\exists y \in M)(f(x) = y)\}.$$

3 Limita funkce

3.1 Definice

Definice 3.1 (Limita funkce f v bodě a)

Nechť pro nějaké $a \in \mathbb{R}$ a $p > 0$ je sjednocení $(a - p, a) \cup (a, a + p)$ částí definičního oboru D_f . Potom řekneme, že limita funkce f v bodě a je ℓ :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in (a - p, a) \cup (a, a + p))(0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon).$$

Definice 3.2 (Limita funkce f v bodě a zprava)

Nechť pro nějaké $a \in \mathbb{R}$ a $p > 0$ je sjednocení $(a, a + p)$ částí definičního oboru D_f . Potom řekneme, že limita funkce f v bodě a **zprava** je ℓ :

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \ell \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in (a, a + p))(a < x < a + \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon).$$

Definice 3.3 (Limita funkce f v bodě a zleva)

Nechť pro nějaké $a \in \mathbb{R}$ a $p > 0$ je sjednocení $(a - p, a)$ částí definičního oboru D_f . Potom řekneme, že limita funkce f v bodě a **zleva** je ℓ :

$$\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = \ell \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in (a - p, a))(a - \delta < x < a \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon).$$

Věta 3.4 (Vztah existence limity a existence limit zleva a zprava)

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \ell \wedge \lim_{x \rightarrow a-} f(x) = \ell$$

3.2 Vlastnosti limity

Lemma 3.5

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = 0.$$

Důkaz. Plyne přímo z definice limity. □

Věta 3.6 (Ekvivalence zápisů limity)

Následující výroky jsou ekvivalentní:

1. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$,
2. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) - \ell = 0$,
3. $\lim_{x \rightarrow a} |f(x) - \ell| = 0$,
4. $\lim_{h \rightarrow 0} f(a + h) = \ell$.

Věta 3.7 (Vlastnosti limity funkce)

Nechť $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ a $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = m$, kde $\ell, m \in \mathbb{R}$. Potom:

- (i) $\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x) = \ell + m$,
- (ii) $\lim_{x \rightarrow a} (f - g)(x) = \ell - m$,
- (iii) $\lim_{x \rightarrow a} (fg)(x) = \ell m$,
- (iiii) pokud navíc $m \neq 0$, pak $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f}{g}(x) = \frac{\ell}{m}$,

Důkaz. Plyne přímo z definice limity. □

Důsledek 3.8

Nechť p je polynom. Potom $\forall a \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow a} p(x) = p(a).$$

3.3 Jednoznačnost limity

Věta 3.9 (O jednoznačnosti limity funkce)

$$\left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \quad \wedge \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = m \right) \Rightarrow \ell = m.$$

Důkaz. Sporem.

Předpokládejme, že $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \wedge \lim_{x \rightarrow a} f(x) = m \wedge \ell \neq m$.

Zvolme $\varepsilon = \frac{1}{2}|\ell - m| > 0$ a z definic limit existují pro toto ε čísla $\delta_\ell > 0$ a $\delta_m > 0$ tak, že

$$\begin{aligned} 0 < |x - a| < \delta_\ell &\Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon \\ 0 < |x - a| < \delta_m &\Rightarrow |f(x) - m| < \varepsilon \end{aligned}$$

Definujme $\delta = \min\{\delta_\ell, \delta_m\}$, pak totiž pro $0 < |x - a| < \delta$ platí, že

$$\varepsilon = \frac{1}{2}|\ell - m| = \frac{1}{2}|f(x) - m - (f(x) - \ell)| \underset{\Delta \neq}{\leq} \frac{1}{2} \underbrace{|f(x) - \ell|}_{< \varepsilon} + \frac{1}{2} \underbrace{|f(x) - m|}_{< \varepsilon} < \varepsilon.$$

Dohromady dostáváme nerovnici $\varepsilon < \varepsilon$, což je spor. □

3.4 Nekonečné limity

Definice 3.10 (Nekonečná limita funkce f v bodě a)

Nechť pro nějaké $a \in \mathbb{R}$ a $p > 0$ je sjednocení $(a - p, a) \cup (a, a + p)$ částí definičního oboru D_f . Potom

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty \Leftrightarrow (\forall \alpha > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in (a-p, a) \cup (a, a+p))(0 < |x-a| < \delta \Rightarrow f(x) > \alpha),$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty \Leftrightarrow (\forall \alpha > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in (a-p, a) \cup (a, a+p))(0 < |x-a| < \delta \Rightarrow f(x) < -\alpha).$$

Poznámka. Analogicky definice jednostranných limit

- $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = -\infty$.

Věta 3.11 (Vlastnosti nekonečných limit)

- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty \wedge \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \ell \neq -\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x) = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty \wedge \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \ell \neq +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x) = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty \wedge \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \ell \neq 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} (f \cdot g)(x) = (\text{sign } \ell) \cdot \infty$
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty \wedge \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \ell \neq 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} (f \cdot g)(x) = (\text{sign } \ell) \cdot (-\infty)$
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{1}{f}\right)(x) = 0$

Poznámka. Výrazy IND: „ $\infty - \infty$ “, „ $0 \cdot \infty$ “, „ $\frac{\infty}{\infty}$ “, „ $\frac{1}{0}$ “ a „ $\frac{0}{0}$ “ jsou neurčité, je potřeba provést algebraické manipulace před samotnou limitou.

Definice 3.12 (Limita funkce v nekonečnu)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x > \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon),$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x < -\delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon),$$

Poznámka. Analogicky definice

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

3.5 Věta o limitě sevřené funkce

Věta 3.13 (Sendvičová věta o limitě sevřené funkce)

Bud' $p > 0$ a necht' pro funkce d , f a h platí, že $(a - p, a) \cup (a, a + p) \subset D_f \cap D_d \cap D_h$ a pro všechna $x \in (a - p, a) \cup (a, a + p)$ je $d(x) \leq f(x) \leq h(x)$. Potom když $\lim_{x \rightarrow a} d(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = \ell$, pak existuje limita funkce f v bodě a a je rovna ℓ

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell.$$

Důkaz. Pro libovolné $\varepsilon > 0$ existuje z definic limit δ_d a δ_h tak, že pro všechna x taková, že

- $0 < |x - a| < \delta_d \Rightarrow \ell - \varepsilon < d(x) < \ell + \varepsilon$
- $0 < |x - a| < \delta_h \Rightarrow \ell - \varepsilon < h(x) < \ell + \varepsilon$

Zvolíme-li $\delta = \min\{p, \delta_d, \delta_h\}$, platí pro všechna x taková, že $0 < |x - a| < \delta$, nerovnosti

$$\ell - \varepsilon < d(x) < f(x) < h(x) < \ell + \varepsilon,$$

čímž je věta dokázána. □

Poznámka. Věta 3.13 platí i pro jednostranné limity a limity v nekonečnu.

3.6 Goniometrické limity

Poznámka. Základní vztahy mezi goniometrickými funkcemi:

- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
- $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$
- $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

Lemma 3.14 (Snížení mocniny u goniometrických funkcí)

$$\begin{aligned}\cos^2(x) &= \frac{1 + \cos(2x)}{2} \\ \sin^2(x) &= \frac{1 - \cos(2x)}{2}\end{aligned}$$

Důkaz. Větu dokážeme pomocí součtových vzorců pro funkci $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$. □

Věta 3.15

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

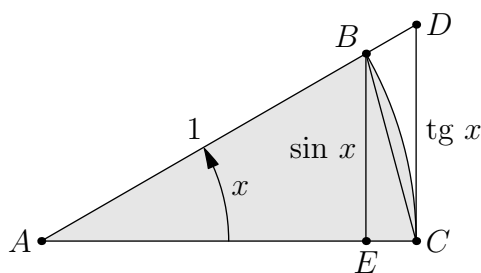
Důkaz. Necht' $x > 0$ je úhel v radiánech. Z obrázku 1 je patrná následující nerovnost mezi plochami AEB, ACB a ACD:

$$\frac{1}{2} \sin x < \frac{1}{2} x < \frac{1}{2} \operatorname{tg} x,$$

odkud

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

Z věty o limitě sevřené funkce snadno dostáváme tvrzení, které platí i o pro $x < 0$ neb funkce $\frac{\sin x}{x}$ je sudá. □



Obrázek 1: Ilustrace k důkazu Věty 3.15.

3.7 Asymptota funkce

Definice 3.16 (Asymptota)

Přímku $y = kx + q$ nazveme asymptotou funkce f v $+\infty$, resp. $-\infty$, platí-li, že

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - kx - q = 0,$$

resp.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - kx - q = 0.$$

Definice 3.17 (Vertikální asymptota)

Přímku $x = a$ nazveme vertikální asymptotou funkce f , má-li funkce f v bodě a nekonečnou limitu zleva nebo zprava.

Věta 3.18 (Nalezení asymptoty)

$y = kx + q$ je asymptotou funkce f v $\pm\infty$ právě tehdy, když

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad (3a)$$

$$q = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - kx. \quad (3b)$$

Důkaz. Důkaz ekvivalence provedeme ve dvou krocích.

1. „ \Rightarrow “: Z definice asymptoty platí $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - kx - q = 0$, odkud přímo plyne (3b). Tvrzení (3a) dostaneme tak, že zkoumáme limitu

$$0 = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x) - kx - q}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} - k - \frac{q}{x} = \left(\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \right) - k - 0.$$

2. „ \Leftarrow “: Z (3b) rovnou plyne definice asymptoty $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - kx - q = 0$. □

4 Spojitost funkce

4.1 Definice

Definice 4.1 (Spojitost funkce v bodě a)

Nechť pro nějaké $p > 0$ je sjednocení $(a - p, a + p)$ částí D_f . Řekneme, že funkce f je spojitá v bodě a , právě když

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Definice 4.2 (Spojitost funkce v bodě a zleva a zprava)

Nechť pro nějaké $p > 0$ je sjednocení $(a - p, a]$, resp. $[a, a + p)$ částí D_f . Řekneme, že funkce f je **spojitá** v bodě a zleva, resp. zprava, právě když

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a), \quad \text{resp.} \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a).$$

Definice 4.3 (Spojitost na uzavřeném intervalu)

Řekneme, že funkce f je spojitá na intervalu $[a, b]$, právě když je spojitá v každém bodě $x \in (a, b)$, spojitá zprava v bodě a a zleva v bodě b .

Definice 4.4 (Odstranitelná nespojitost)

Funkce f má v bodě a **odstranitelnou nespojitost** \Leftrightarrow $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existuje, ale $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq f(a)$

Definice 4.5 (Skoková nespojitost)

Funkce f má v bodě a **skokovou nespojitost** \Leftrightarrow existují obě konečné jednostranné limity, ale nerovnájí se.

Definice 4.6 (Podstatná nespojitost)

Funkce f má v bodě a **podstatnou nespojitost** \Leftrightarrow alespoň jedna jednostranná limita je nekonečná nebo neexistuje.

Věta 4.7

Funkce f je spojitá v bodě a \Leftrightarrow Funkce f je spojitá v bodě a zleva i zprava.

Věta 4.8

Nechť jsou funkce f a g spojitá v bodě a a buď $\alpha \in \mathbb{R}$. Potom funkce $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$, αf i $\frac{f}{g}$ pro $g(a) \neq 0$ jsou spojitě v a .

Věta 4.9

Nechť je funkce g spojitá v bodě a a funkce f spojitá v bodě $g(a)$. Potom funkce $f \circ g$ je spojitá v a .

4.2 Vlastnosti spojitých funkcí

Věta 4.10 (Bolzano – o existenci nulového bodu spojitě funkce)

Nechť funkce f je spojitá na intervalu $[a, b]$ a $f(a)f(b) < 0$. Potom existuje $c \in (a, b)$ tak, že $f(c) = 0$.

Důkaz. Obrázkový – graf spojitě funkce nutně musí protnout osu x , pokud $f(a)$ a $f(b)$ mají opačná znamení. \square

Věta 4.11 (Darboux – o existenci řešení $f(c) = d$ pro spojitou funkci f)

Nechť funkce f je spojitá na intervalu $[a, b]$. Potom pro každé číslo d ležící mezi $f(a)$ a $f(b)$ existuje $c \in (a, b)$, že $f(c) = d$.

Důkaz. Je-li f spojitá funkce, je i $f - d$ je spojitá a pro d ležící mezi $f(a)$ a $f(b)$ platí, že $(f(a) - d)(f(b) - d) \leq 0$. Proto podle Věty 4.10 aplikované na funkci $f - d$ existuje $c \in (a, b)$ tak, že $f(c) - d = 0$. \square

Definice 4.12 (Maximum a minimum funkce)

Řekneme, že funkce f má v bodě $a \in D_f$ **maximum**, resp. **minimum** právě tehdy, když $f(a) \geq f(x)$, resp. $f(a) \leq f(x)$ pro všechny $x \in D_f$.

Definice 4.13 (Omezená funkce)

Řekneme, že funkce f je omezená na množině $M \subset D_f$ \Leftrightarrow $(\exists K > 0)(\forall x \in M)(|f(x)| \leq K)$.

Věta 4.14 (Weierstrass – extrémy spojité funkce na uzavřeném intervalu)

Nechť funkce f je spojitá na intervalu $[a, b]$. Potom funkce f je omezená a nabývá na $[a, b]$ svého minima i maxima, tj. $\exists c \in [a, b]$ a $\exists d \in [a, b]$ tak, že funkce f nabývá v bodě c svého maxima a v bodě d svého minima.

5 Derivace funkce

5.1 Definice

Definice 5.1 (Derivace funkce f v bodě a)

Pokud existuje limita

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h},$$

nazýváme tuto limitu derivací funkce f v bodě a a značíme $f'(a)$, $\frac{df}{dx}(a)$ nebo $f^{(1)}(a)$.

Definice 5.2 (Jednostranné derivace)

Pokud existuje limita

$$\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a + h) - f(a)}{h},$$

resp.

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a + h) - f(a)}{h},$$

nazýváme tuto limitu derivací funkce f v bodě a zleva, resp. zprava a značíme $f'_-(a)$, resp. $f'_+(a)$.

Věta 5.3 (O limitě derivace)

Nechť pro funkci f a bod $a \in D_f$ platí, že

1. $\exists \delta > 0$ tak, že f je diferencovatelná na $(a - \delta, a)$, resp. $(a, a + \delta)$,
2. funkce f je spojitá v bodě a zleva, resp. zprava,
3. $\exists \lim_{x \rightarrow a^-} f'(x)$, resp. $\exists \lim_{x \rightarrow a^+} f'(x)$.

Potom existuje $f'_-(a)$, resp. $f'_+(a)$ tak, že platí

$$f'_-(a) = \lim_{x \rightarrow a^-} f'(x), \quad \text{resp.} \quad f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} f'(x).$$

Poznámka. Derivace vyšších řádů $f^{(n)}(x) = \frac{d^n}{dx^n} f(x)$ n . derivace. Definujeme pomocí indukce $f^{(n)}(x) = \frac{d}{dx} f^{(n-1)}(x)$, $n \in \mathbb{N}$.

5.2 Pravidla pro derivování

Věta 5.4 (Pravidla pro derivování)

Nechť $\alpha \in \mathbb{R}$, f a g mají v bodě x konečnou derivaci. Potom

1. $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$,
2. $(\alpha f)'(x) = \alpha f'(x)$
3. $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$,

$$4. \left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}, \quad \text{pokud } g(x) \neq 0$$

Důkaz. Tvzení 1. a 2. plynou přímo z definice derivace.

3.

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} &= \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) \overbrace{-f(x+h)g(x) + f(x+h)g(x)}^0 - f(x)g(x)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) \frac{g(x+h) - g(x)}{h} + g(x) \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \\ &= f(x)g'(x) + f'(x)g(x) \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x+h) - \left(\frac{f}{g}\right)(x)}{h} &= \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)} \right) = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x+h)}{h g(x)g(x+h)} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x) \overbrace{-f(x)g(x) + f(x)g(x)}^0 - f(x)g(x+h)}{h g(x)g(x+h)} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f(x+h) - f(x))g(x) - f(x)(g(x+h) - g(x))}{h g(x)g(x+h)} = \\ &= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2} \end{aligned}$$

□

Věta 5.5 (Derivace funkce x^n)

$$f(x) = x^n, \quad n \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = nx^{n-1}.$$

Důkaz. Důkaz matematickou indukcí pro $n \in \mathbb{N}$.

□

Věta 5.6 (Vztah derivace a spojitosti)

Nechť funkce f má v bodě a konečnou derivaci. Pak je v bodě a spojitá.

Důkaz.

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(a+h) - f(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} (f(a+h) - f(a)) = \lim_{h \rightarrow 0} h \underbrace{\frac{f(a+h) - f(a)}{h}}_{f'(a) \in \mathbb{R}} = 0,$$

odkud $\lim_{h \rightarrow 0} f(a+h) = f(a)$.

□

Věta 5.7 (Leibnizovo pravidlo)

Nechť funkce f a g mají konečnou derivaci n . řádu. Pak

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

Poznámka. Nultá derivace funkce $f^{(0)}$ označuje původní funkci f , tj. $f^{(0)} = f$.

Poznámka. Kombinační číslo $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$ pro $n \in \mathbb{N}, k \in 0, \dots, n$

Poznámka. Pro $n = 1$ dává Leibnizovo pravidlo $(f \cdot g)' = f'g + fg'$.

5.3 Derivace složené funkce

Věta 5.8 (Řetězové pravidlo)

Nechť funkce g má konečnou derivaci v a a funkce f má konečnou derivaci v bodě $g(a)$. Potom

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a).$$

Důkaz.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{(f \circ g)(x) - (f \circ g)(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(g(x)) - f(g(a))}{g(x) - g(a)} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = f'(g(a)) \cdot g'(a).$$

□

Důsledek 5.9 (Řetězové pravidlo pro více funkcí)

$$(f_1 \circ f_2 \circ f_3 \circ \dots \circ f_n)' = f_1' f_2' f_3' \dots f_n',$$

kde jsou kvůli přehlednosti vynechány body, ve kterých jsou derivace funkcí vyčísleny.

5.4 Derivace inverzní funkce

Věta 5.10 (Derivace inverzní funkce)

Nechť funkce f je prostá a f^{-1} je její inverzní funkce. Nechť funkce f má konečnou derivaci v bodě $x = f^{-1}(y)$. Potom

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Důkaz. Důkaz vychází z Věty 2.11 o inverzní funkci: $f \circ f^{-1} = \text{id}$ a Věty 5.8 o derivaci složené funkce takto:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dy} (f(f^{-1}(y))) &= \frac{d}{dy} (y), \\ \frac{df}{dx} \left(\underbrace{f^{-1}(y)}_x \right) \cdot \frac{df^{-1}}{dy} (y) &= 1, \end{aligned}$$

odkud vydělením

□

5.5 Tečna a normála

Věta 5.11 (Rovnice tečny)

Nechť existuje konečná derivace funkce f v bodě a . Potom rovnice tečny $t_f(a)$ ke grafu funkce f v bodě a má rovnici

$$t_f(a) : y - f(a) = f'(a)(x - a).$$

Důkaz. Nechť pro malé h je s_h sečna procházející body $[a, f(a)]$ a $[a + h, f(a + h)]$. Tato sečna má rovnici $s_h : y = k(h)x + q(h)$, kde

$$k(h) = \frac{f(a + h) - f(a)}{h}, \quad q(h) = f(a) - k(h)a.$$

Po limitním přechodu $h \rightarrow 0$ se sečna s_h stane tečnou $t_f(a)$ s rovnicí $t_f(a) : y = kx + q$, kde

$$k = \lim_{h \rightarrow 0} k(h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} = f'(a), \quad q = f(a) - f'(a)a.$$

Odtud plyne tvrzení věty. □

Věta 5.12 (Rovnice normály)

Nechť existuje konečná nenulová derivace funkce f v bodě a . Potom rovnice normály $n_f(a)$ ke grafu funkce f v bodě a má rovnici

$$n_f(a) : y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x - a).$$

Důkaz. Normála $n_f(a)$ ke grafu f v bodě a je přímka kolmá na tečnu $t_f(a)$ procházející bodem $[a, f(a)]$. Podle Věty 5.11 má tečna $t_f(a)$ rovnici v normálním tvaru

$$t_f(a) : f'(a)x - y + f(a) - af'(a) = 0,$$

kde koeficienty u x a y tvoří normálový vektor $(f'(a), -1)$. K němu kolmý vektor $(1, f'(a))$ je pak normálovým vektorem normály $n_f(a)$ s rovnicí v normálním tvaru

$$n_f(a) : x + f'(a)y + C = 0.$$

Konstanta C se určí z podmínky protnutí $n_f(a)$ a grafu f v bodě a jako $C = a + f'(a)f(a)$. Odtud již snadno plyne tvrzení věty. □

5.6 Derivace cyklometrických funkcí

5.6.1 Funkce arcsin

Funkce \sin je prostá na intervalu $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ a má inverzní funkci, kterou značíme \arcsin .

$D_{\arcsin} = H_{\sin} = [-1, 1]$	x [rad]	$\arcsin y$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$H_{\arcsin} = D_{\sin} = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$	$\sin x$	y	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$

Věta 5.13 (Derivace funkce arcsin)

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad \text{na } (-1, 1)$$

Důkaz. Podle Věty 5.10: $(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'}$, kde $x = \sin y$. Položíme-li $y = \arcsin x$, máme vztah

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\cos(\arcsin x)}.$$

Už stačí jen upravit pravou stranu. Použijeme vztah mezi \sin a \cos : $\cos z = \sqrt{1 - \sin^2 z}$, který platí pro $\forall z \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, kde dosadíme $z = \arcsin x$:

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)} = \sqrt{1 - x^2}.$$

□

5.6.2 Funkce arccos

Funkce \cos je prostá na intervalu $[0, \pi]$ a má inverzní funkci, kterou značíme \arccos .

$D_{\arccos} = H_{\cos} = [-1, 1]$	x [rad]	$\arccos y$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$H_{\arccos} = D_{\cos} = [0, \pi]$	$\cos x$	y	$\frac{\sqrt{4}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$

Lemma 5.14

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}.$$

Důkaz. Rovnost

$$\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x$$

je ekvivalentní rovnosti

$$x = \sin(\arcsin x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \arccos x\right).$$

Použijeme-li součtový vzorec pro funkci \sin na pravé straně této rovnosti, dostaneme

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \arccos x\right) = \underbrace{\sin \frac{\pi}{2}}_1 \cos(\arccos x) - \underbrace{\cos \frac{\pi}{2}}_0 \sin(\arccos x) = x.$$

□

Věta 5.15 (Derivace funkce arccos)

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{na } (-1, 1)$$

Důkaz. Plyne z Lemma 5.14.

□

5.6.3 Funkce arctg

Funkce tg je prostá na intervalu $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ a má inverzní funkci, kterou značíme \arctg .

$D_{\arctg} = H_{\text{tg}} = \mathbb{R}$	x [rad]	$\arctg y$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$H_{\arctg} = D_{\text{tg}} = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$	$\text{tg } x$	y	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	ndef.
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctg x = \frac{\pi}{2}$							
$\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctg x = -\frac{\pi}{2}$							

Věta 5.16 (Derivace funkce arctg)

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{na } \mathbb{R}$$

Důkaz. Podle Věty 2.11: $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'}$, kde $x = \operatorname{tg} y$. Položíme-li $y = \operatorname{arctg} x$, máme vztah

$$(\operatorname{arctg} x)' = \cos^2(\operatorname{arctg} x).$$

Už stačí jen upravit pravou stranu. Použijeme následující převod mezi \cos a tg :

$$\frac{1}{\cos^2 z} = \frac{\cos^2 z + \sin^2 z}{\cos^2 z} = 1 + \operatorname{tg}^2 z,$$

odkud

$$\cos^2 z = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 z},$$

kde dosadíme $z = \operatorname{arctg} x$. □

5.6.4 Funkce arccotg

Funkce cotg je prostá na intervalu $(0, \pi)$ a má inverzní funkci, kterou značíme $\operatorname{arccotg}$.

$$\begin{aligned} D_{\operatorname{arccotg}} &= H_{\operatorname{cotg}} = \mathbb{R} \\ H_{\operatorname{arccotg}} &= D_{\operatorname{cotg}} = (0, \pi) \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arccotg} x &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arccotg} x &= \pi \end{aligned}$$

x [rad]	$\operatorname{arccotg} y$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\operatorname{cotg} x$	y	nedef.	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

Lemma 5.17

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x = \frac{\pi}{2}.$$

Důkaz. Rovnost

$$\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arccotg} x$$

je ekvivalentní rovnosti

$$x = \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arccotg} x\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arccotg} x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arccotg} x\right)}.$$

Použijeme-li součtový vzorec pro funkci \sin a \cos na pravé straně této rovnosti, dostaneme

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arccotg} x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arccotg} x\right)} = \frac{\overbrace{\sin \frac{\pi}{2}}^1 \cos(\operatorname{arccotg} x) - \overbrace{\cos \frac{\pi}{2}}^0 \sin(\operatorname{arccotg} x)}{\underbrace{\cos \frac{\pi}{2}}_0 \cos(\operatorname{arccotg} x) + \underbrace{\sin \frac{\pi}{2}}_1 \sin(\operatorname{arccotg} x)} = \operatorname{cotg}(\operatorname{arccotg} x) = x.$$

□

Věta 5.18 (Derivace funkce arccotg)

$$(\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{1+x^2} \quad \text{na } \mathbb{R}$$

Důkaz. Plyne z Lemma 5.17. □

6 Užití derivace k vyšetřování funkce

6.1 Věty o přírůstku funkce

Lemma 6.1

Pokud $f'(a) > 0$ (nebo též $f'(a) = +\infty$), pak existuje $\varepsilon > 0$ tak, že pro všechna $h \in (0, \varepsilon)$ platí

$$f(a - h) < f(a) < f(a + h).$$

Pokud $f'(a) < 0$ (nebo též $f'(a) = -\infty$), pak existuje $\varepsilon > 0$ tak, že pro všechna $h \in (0, \varepsilon)$ platí

$$f(a - h) > f(a) > f(a + h).$$

Důkaz. Dokážeme první tvrzení.

Z definice derivace v bodě a víme $f'(a) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{k}(f(a + k) - f(a)) > 0$.

V definici této limity pro námi zvolené $\varepsilon = f'(a) > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že $\forall k \in (-\delta, \delta)$, $k \neq 0$,

$$\left| \frac{f(a + k) - f(a)}{k} - f'(a) \right| < \varepsilon = f'(a),$$

tj.

$$-f'(a) < \frac{f(a + k) - f(a)}{k} - f'(a) < f'(a),$$

tj.

$$0 < \frac{f(a + k) - f(a)}{k} < 2f'(a).$$

Pro $k > 0$ dostáváme $f(a + k) - f(a) > 0$ a volíme $h = k$; celkem: $f(a) < f(a + h)$.

Pro $k < 0$ dostáváme $f(a + k) - f(a) < 0$ a volíme $h = -k$; celkem: $f(a - h) < f(a)$. \square

Věta 6.2 (Rolle)

Nechť funkce f je spojitá na $[a, b]$, má konečnou derivaci na (a, b) a nechť navíc $f(a) = f(b)$. Potom $\exists c \in (a, b)$ tak, že $f'(c) = 0$.

Důkaz. Podle Weierstrassovy Věty 4.14 pro f spojitou na $[a, b]$ existuje f_{\min} a f_{\max} a může nastat právě jeden z následujících dvou případů:

1. f je konstantní $\Rightarrow f' = 0$ pro $\forall x$.

2. f není konstantní a f_{\min} nebo f_{\max} se nabývá uvnitř (a, b) v nějakém bodě c , kde nutně $f'(c) = 0$, jinak bychom byli ve sporu s Lemma 6.1. \square

Věta 6.3 (Lagrange)

Nechť funkce f je spojitá na $[a, b]$ a diferencovatelná na (a, b) . Potom $\exists c \in (a, b)$ tak, že

$$f'(c) = \frac{f(a) - f(b)}{a - b}.$$

Důkaz. Definujme pomocnou funkci $g(x) = f(x) - Kx$, kde K je nějaké číslo zvolené tak, abychom mohli na funkci g použít Rolleho Větu 6.2, tj. chceme splnit předpoklad $g(a) = g(b)$:

$$g(a) = f(a) - Ka \stackrel{?}{=} g(b) = f(b) - Kb,$$

odkud

$$K = \frac{f(a) - f(b)}{a - b}.$$

Pak podle Rolleho Věty 6.2 existuje $c \in (a, b)$ tak, že $g'(c) = 0$ a tudíž

$$g'(c) = f'(c) - \frac{f(a) - f(b)}{a - b} = 0.$$

\square

Důsledek 6.4

Nechť funkce f je spojitá na $[a, b]$ a necht' $f'(x) = 0 \quad \forall x \in (a, b)$. Potom f je konstantní funkce.

Důkaz. Sporem. Předpokládáme, že f je spojitá na $[a, b]$, $\exists f'$ na (a, b) a $\exists c, d \in [a, b]$ tak, že $f(c) \neq f(d)$ (tj. f není konstantní). Pak podle Lagrangeovy Věty 6.3 existuje $e \in (c, d)$ tak, že $f'(e) = \frac{f(d)-f(c)}{d-c}$, což je rovno dle předpokladu 0, tj. $f(d) = f(c)$ a to je spor. \square

Věta 6.5

Nechť funkce f a g jsou spojitě na intervalu $[a, b]$ a necht' $f'(x) = g'(x)$ na intervalu (a, b) . Potom $\exists C \in \mathbb{R}$ tak, že $f(x) = g(x) + C \quad \forall x \in [a, b]$.

Důkaz. Definujme pomocnou funkci $h = f - g$, která je spojitá na $[a, b]$ a pro $\forall x \in (a, b)$ $h'(x) = 0$. Podle Důsledku 6.4 je tato funkce konstantní a proto

$$h(x) = f(x) - g(x) = K.$$

\square

6.2 Monotonie

Definice 6.6 (Monotonie funkce)

Řekneme, že funkce f na intervalu J

ostře roste	\Leftrightarrow	$(\forall x_1, x_2 \in J)(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2))$
roste (neklesá)	\Leftrightarrow	$(\forall x_1, x_2 \in J)(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2))$
ostře klesá	\Leftrightarrow	$(\forall x_1, x_2 \in J)(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2))$
klesá (neroste)	\Leftrightarrow	$(\forall x_1, x_2 \in J)(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2))$

Věta 6.7 (Vztah derivace a monotonie)

Nechť funkce f je diferencovatelná na intervalu J . Potom platí

$f'(x) > 0 \quad \forall x \in J$	\Rightarrow	f je ostře rostoucí na J .
$f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in J$	\Rightarrow	f je rostoucí (neklesající) na J .
$f'(x) < 0 \quad \forall x \in J$	\Rightarrow	f je ostře klesající na J .
$f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in J$	\Rightarrow	f je klesající (nerostoucí) na J .

6.3 Lokální a globální extrém

Definice 6.8 (Lokální extrém funkce)

Řekneme, že f má v bodě $a \in D_f$

ostře lokální minimum	\Leftrightarrow	$(\exists \varepsilon > 0)(\forall x \in D_f)(0 < x - a < \varepsilon \Rightarrow f(x) > f(a))$
lokální minimum	\Leftrightarrow	$(\exists \varepsilon > 0)(\forall x \in D_f)(0 < x - a < \varepsilon \Rightarrow f(x) \geq f(a))$
ostře lokální maximum	\Leftrightarrow	$(\exists \varepsilon > 0)(\forall x \in D_f)(0 < x - a < \varepsilon \Rightarrow f(x) < f(a))$
lokální maximum	\Leftrightarrow	$(\exists \varepsilon > 0)(\forall x \in D_f)(0 < x - a < \varepsilon \Rightarrow f(x) \leq f(a))$

Věta 6.9 (Nutná podmínka existence extrému)

Má-li funkce f v bodě $a \in D_f$ lokální extrém, pak $f'(a) = 0$ nebo $f'(a)$ neexistuje.

Důkaz. Sporem. Předpokládáme-li, že $\exists f'(a)$ a zároveň $f'(a) \neq 0$, pak:

$f'(a) > 0$	\Rightarrow	f je dle Věty 6.7 v bodě a ostře rostoucí,
$f'(a) < 0$	\Rightarrow	f je dle Věty 6.7 v bodě a ostře klesající,

což je spor s předpokladem existence lokálního extrému v bodě a . \square

Poznámka. **Globální extrém** spojitě a diferencovatelné funkce f na intervalu $[a, b]$ vyšetříme tak, že nalezneme všechny lokální extrém na (a, b) a porovnáme s hraničními hodnotami $f(a)$ a $f(b)$.

Definice 6.10 (Stacionární bod)

Stacionární bod funkce f je takový bod, ve kterém je derivace funkce rovna 0 nebo neexistuje.

6.4 Test extrému dle 1. derivace

Věta 6.11 (Test extrému funkce dle 1. derivace)

Nechť funkce f je spojitá v bodě $a \in D_f$ a necht' bod a je stacionárním bodem funkce f . Pokud existuje $\delta > 0$ tak, že

- $f' > 0$ na $(a - \delta, a)$ a $f' < 0$ na $(a, a + \delta)$, potom f má v bodě a lokální maximum.
- $f' < 0$ na $(a - \delta, a)$ a $f' > 0$ na $(a, a + \delta)$, potom f má v bodě a lokální minimum.
- f' má stejné znamení v $(a - \delta, a) \cup (a, a + \delta)$, potom f nemá v bodě a lokální extrém.

6.5 Test extrému dle 2. derivace

Věta 6.12 (Test extrému funkce dle 2. derivace)

Nechť funkce f je spojitá v bodě $a \in D_f$ a necht' $f'(a) = 0$.

1. Pokud $f''(a) < 0$, potom f má v bodě a ostré lokální maximum,
2. Pokud $f''(a) > 0$, potom f má v bodě a ostré lokální minimum.

Důkaz. Dokážeme první tvrzení. Pokud $f''(a) < 0$, pak f' je ostře klesající v bodě a . Pak $\exists \delta > 0$ tak, že pro každé x_1, x_2 : $a - \delta < x_1 < a < x_2 < a + \delta$ platí

$$f'(x_1) > \underbrace{f'(a)}_0 > f'(x_2)$$

a tudíž podle Věty 6.11 je v bodě a ostré lokální maximum. □

Příklad. Trhovec potřebuje z kruhového papíru o poloměru R udělat kornout o maximálním objemu. Jakou kruhovou výseč je potřeba vystříhnout?

Řešení: α ... úhel v radiánech, r ... poloměr podstavy kuželu

Obvod podstavy kužele je $2\pi r = 2\pi R - R\alpha$, odkud $r = R \left(1 - \frac{\alpha}{2\pi}\right)$.

Výška kužele:

$$v = \sqrt{R^2 - r^2} = R \sqrt{1 - \left(1 - \frac{\alpha}{2\pi}\right)^2} = R \sqrt{\frac{\alpha}{\pi} - \frac{\alpha^2}{4\pi^2}}.$$

Hledáme maximum objemu kužele $V(\alpha) = \frac{\pi}{3} R^3 \left(1 - \frac{\alpha}{2\pi}\right)^2 \sqrt{\frac{\alpha}{\pi} - \frac{\alpha^2}{4\pi^2}}$ pro $\alpha \in (0, 2\pi)$:

$$V'(\alpha) = \frac{R^3}{3} \left(\frac{\alpha}{\pi} - \frac{\alpha^2}{4\pi^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{\alpha}{2\pi}\right) \left(1 - 3\frac{\alpha}{\pi} + 3\frac{\alpha^2}{4\pi^2}\right) \stackrel{!}{=} 0.$$

Řešením této rovnice jsou pro $\alpha \in (-2\pi, 2\pi)$ kořeny $\alpha_{1,2} = 2\pi \left(1 \pm \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$. Nyní stačí aplikovat buď Větu 6.11 nebo Větu 6.12 a ukázat, že pro tato $\alpha_{1,2}$ nabývá funkce $V(\alpha)$ maximum.

6.6 Konvexní a konkávní funkce

Definice 6.13 (Konvexní a konkávní funkce)

Nechť je funkce f diferencovatelná na (a, b) . Říkáme, že funkce f je

ryze konvexní	\Leftrightarrow	f' je ostře rostoucí na (a, b)
konvexní	\Leftrightarrow	f' je rostoucí na (a, b)
ryze konkávní	\Leftrightarrow	f' je ostře klesající na (a, b)
konkávní	\Leftrightarrow	f' je klesající na (a, b)

Poznámka. Konvexní a konkávní funkce jsme zde definovali pomocí pojmu derivace, tedy pouze pro diferencovatelné funkce. Pojem konvexnosti a konkávnosti funkce lze zavést i pro obecné funkce, viz např. Odstavec 4.7 v [1].

Definice 6.14 (Inflexní bod)

Nechť funkce f je diferencovatelná v bodě a . Řekneme, že bod a je **inflexním bodem** funkce f právě tehdy, když se v bodě a mění charakter funkce f z konvexní na konkávní nebo opačně.

Věta 6.15 (Nutná podmínka existence inflexního bodu)

Bud' c inflexní bod. Potom $f''(c) = 0$ nebo $f''(c)$ neexistuje.

6.7 l'Hôpitalovo pravidlo

Věta 6.16 (l'Hôpitalovo pravidlo)

Bud' $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$. Nechť f má konečnou derivaci a $g'(x) \neq 0$ na $(a - \delta, a) \cup (a, a + \delta)$ pro nějaké $\delta > 0$. Dále nechť platí jedna ze dvou podmínek:

1. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \wedge \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$
2. $\lim_{x \rightarrow a} |g(x)| = +\infty$

Potom jestliže existuje limita na levé straně následující rovnice, platí mezi limitami rovnost

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

6.8 Vyšetřování průběhu funkce

Poznámka. Při vyšetřování průběhu funkce f (tj. chceme alespoň zjistit přibližný graf funkce) postupně zkoumáme:

1. definiční obor D_f ,
2. limity v krajních bodech D_f ,
3. asymptoty v $\pm\infty$, případně vertikální asymptoty
4. první derivaci funkce f' její definiční obor ($D_{f'} \subseteq D_f$),
5. intervaly monotonie,
6. druhou derivaci funkce f'' a její definiční obor $D_{f''}$,
7. lokální extrémy funkce f ,
8. globální extrémy funkce f na D_f ,
9. konvexnost/konkávnost funkce,
10. inflexní body,
11. významné body pro kreslení (extrémy, průsečíky s osami a pod.).

7 Integrální počet

7.1 Primitivní funkce a neurčitý integrál

Definice 7.1 (Primitivní funkce)

Funkci F nazveme primitivní k funkci f na intervalu $[a, b]$, pokud F je spojitá na intervalu $[a, b]$ a platí $F'(x) = f(x)$ pro všechna $x \in (a, b)$.

Věta 7.2 (O jednoznačnosti primitivní funkce)

Bud' funkce F primitivní k funkci f na intervalu (a, b) . Potom funkce G je primitivní k funkci f právě když $(\exists C \in \mathbb{R})(\forall x \in (a, b))(F(x) = G(x) + C)$.

Důkaz. Zjevně $F' = G'$, proto z definice 7.1 plyne, že funkce G je primitivní k f . \square

Definice 7.3 (Neurčitý integrál)

Nechť pro funkci f existuje primitivní funkce F na (a, b) . Množinu všech primitivních funkcí k funkci f nazveme neurčitým integrálem funkce f v intervalu (a, b) a značíme symbolem

$$\int f(x) dx, \quad \text{nebo krátce} \quad \int f.$$

Poznámka.

$$\int f = \int f(x) dx = \{F : F \text{ je primitivní k } f\} = F(x) + C,$$

kde $f \dots$ integrand, $x \dots$ integrační proměnná, $F \dots$ reprezentant (=nějaká primitivní funkce), $C \dots$ integrační konstanta.

Věta 7.4 (Linearita integrace)

Bud' F , resp. G primitivní funkce k f , resp. g na (a, b) a $\alpha \in \mathbb{R}$. Pak $F + \alpha G$ je primitivní funkce k $f + \alpha g$ na (a, b) .

Důkaz. Plyne z linearity derivace a definice 7.1. \square

Věta 7.5 (Per partes)

Nechť f, g mají na (a, b) konečné derivace a funkce $h = fg'$ má v (a, b) primitivní funkci H . Potom funkce $f'g$ má v (a, b) primitivní funkci $fg - H$.

Neboli

$$\int fg' = fg - \int f'g.$$

Důkaz. Stačí ověřit, zda funkce $fg - H$ je primitivní k $f'g$, tj. dle definice 7.1 a pravidla pro derivaci součinu (Věta 5.4)

$$(fg - H)' = f'g + \underbrace{fg'}_h - \underbrace{H'}_h = f'g + h - h = f'g.$$

\square

Věta 7.6 (Substituce)

Nechť f má v (a, b) primitivní funkci F , φ je prostá a má v (α, β) konečnou derivaci φ' a $\varphi(\alpha, \beta) \subset (a, b)$. Potom funkce $F \circ \varphi$ je primitivní funkce $(f \circ \varphi)\varphi'$ v intervalu (α, β) . Neboli

$$\int f(z) dz = \int f(\varphi(x))\varphi'(x) dx = F(\varphi(x)) + C.$$

Důkaz. Stačí ověřit, zda funkce $F \circ \varphi$ je primitivní k $(f \circ \varphi)\varphi'$, tj. dle definice 7.1 a Věty 5.8 (řetězové pravidlo)

$$\left((F \circ \varphi)(x) \right)' = F'(\varphi(x))\varphi'(x).$$

□

Lemma 7.7

Pro $n \neq -1$ platí $\int x^n = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$.

7.2 Určitý integrál

Definice 7.8 (Rozdělení intervalu σ)

Rozdělení σ intervalu $[a, b]$ rozumíme množinu bodů $\sigma = \{x_k : k = 0, 1, 2, \dots, n\}$ takovou, že $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$. Intervaly $[x_{k-1}, x_k]$ nazýváme částečnými intervaly rozdělení σ pro $k = 1, 2, \dots, n$.

Definice 7.9 (Horní integrální součet $S_f(\sigma)$)

Horní integrální součet $S_f(\sigma)$ funkce f při rozdělení σ je

$$S_f(\sigma) = \sum_{k=1}^n M_k(x_k - x_{k-1}),$$

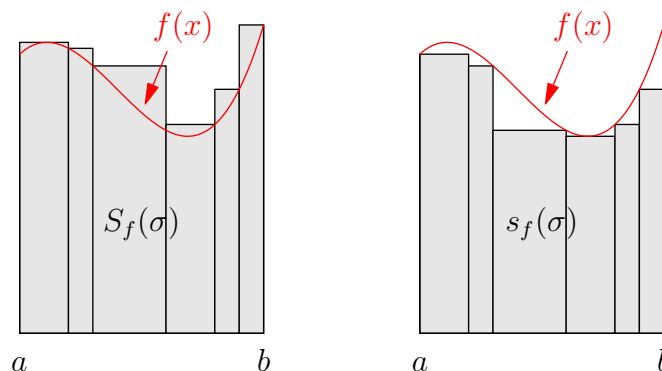
kde $M_k = \max \{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$ pro $k = 1, 2, \dots, n$.

Definice 7.10 (Dolní integrální součet $s_f(\sigma)$)

Dolní integrální součet $s_f(\sigma)$ funkce f při rozdělení σ je

$$s_f(\sigma) = \sum_{k=1}^n m_k(x_k - x_{k-1}),$$

kde $m_k = \min \{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$ pro $k = 1, 2, \dots, n$.



Obrázek 2: Ilustrace k Riemannově definici určitého integrálu

Definice 7.11 (Určitý integrál)

Buď $s_f(\sigma)$, resp. $S_f(\sigma)$ dolní, resp. horní integrální součet funkce f při rozdělení σ intervalu $[a, b]$. Potom jednoznačně určené číslo I , které pro všechna možná rozdělení σ splňuje

$$s_f(\sigma) \leq I \leq S_f(\sigma)$$

se nazývá určitý integrál funkce f od a do b (přes interval (a, b)) a značí se

$$I = \int_a^b f(x) \, dx = \int_a^b f.$$

Funkce, která má určitý integrál se nazývá Riemannovsky integrovatelná (integrabilní).

Věta 7.12 (Základní vlastnosti určitého integrálu)

1. $\int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^c f$, pokud jednotlivé integrály existují.

2. $\int_a^a f = 0$

3. $\int_a^b f = -\int_b^a f$

Důkaz.

1. Plyne přímo z definice 7.11 nebo též z grafického znázornění integrálu jako plochy pod grafem funkce f pokud $a < b < c$.
2. Z prvního tvrzení je patrné, že pro volbu $a = b = c$ máme rovnost $2 \int_a^a f = \int_a^a f$, kterou splňuje pouze $\int_a^a f = 0$.
3. Z prvního a druhého tvrzení dostaneme pro volbu $c = a$ rovnost $\int_a^b f + \int_b^a f = 0$, odkud již plyne třetí tvrzení.

□

Definice 7.13 (Integrál jako funkce horní, resp. dolní meze)

Nechť funkce f je Riemannovsky integrovatelná na intervalu $[a, b]$. Potom

$$x \mapsto \int_a^x f(t) \, dt$$

nazýváme **integrálem jako funkcí horní meze** a

$$x \mapsto \int_x^b f(t) \, dt$$

nazýváme **integrálem jako funkcí dolní meze**.

Lemma 7.14

Funkce $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ je primitivní funkce k funkci f , tj.

$$\frac{d}{dx} \left(\int_a^x f(t)dt \right) = f(x).$$

Věta 7.15 (Newtonova formule)

Nechť funkce f je spojitá na $[a, b]$ a F její primitivní funkce. Potom

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Důkaz. Dle lematu 7.14 zkoumejme primitivní funkci F k f ve tvaru

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt + K,$$

kde $K \in \mathbb{R}$. Z hodnoty v bodě $x = a$ určíme K takto:

$$F(a) = \int_a^a f(t)dt + K = 0 + K,$$

odkud $K = F(a)$. Z hodnoty v bodě $x = b$ pak dostaneme tvrzení věty:

$$F(b) = \int_a^b f(t)dt + F(a).$$

□

Věta 7.16 (Per partes)

Nechť funkce f, g mají na $[a, b]$ spojitě derivace. Potom

$$\int_a^b f(x)g'(x) dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x) dx.$$

Důkaz. Plyne z vět 7.5 a 7.15.

□

Věta 7.17 (Substituce)

Bud' φ' spojitá a nenulová na intervalu $[\alpha, \beta]$ (tj. φ je prostá na $[\alpha, \beta]$). Nechť funkce f je spojitá na H_φ . Potom

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(u) du.$$

Důkaz. Plyne z vět 7.6 a 7.15.

□

7.3 Vlastnosti určitého integrálu

Věta 7.18 (Vlastnosti určitého integrálu)

Nechť $a \leq b$.

1. Nechť $f \geq 0$ na (a, b) . Pak $\int_a^b f \geq 0$.

2. Nechť $f > 0$ na (a, b) . Pak $\int_a^b f > 0$.

3. Nechť $f < g$ na (a, b) . Pak $\int_a^b f < \int_a^b g$.

4. $\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$, přičemž rovnost nastává, pokud je funkce f nezáporná na (a, b) .

5. $m(b-a) < \int_a^b f < M(b-a)$, kde $m = \min \{f(x) : x \in [a, b]\}$ a $M = \max \{f(x) : x \in [a, b]\}$.

Věta 7.19 (Věta o střední hodnotě integrálu)

Nechť f a g jsou spojité funkce na intervalu $[a, b]$ a navíc funkce g nezáporná na $[a, b]$. Potom $\exists c \in [a, b]$ tak, že

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = f(c) \int_a^b g(x) dx.$$

Důkaz. Označme $m = \min \{f(x) : x \in [a, b]\}$ a $M = \max \{f(x) : x \in [a, b]\}$, pak platí

$$mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x).$$

Integrací přes interval $[a, b]$ dostaneme nerovnost

$$m \int_a^b g(x) dx \leq \int_a^b f(x)g(x) dx \leq M \int_a^b g(x) dx.$$

Celou nerovnost můžeme vydělit kladným integrálem (číslem) $\int_a^b g$, neboť dle předpokladů je $g > 0$

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x) dx}{\underbrace{\int_a^b g(x) dx}_Y} \leq M.$$

Tento výsledek je možné interpretovat také tak, že pro Y ležící mezi m (minimem f) a M (maximem f) existuje ze spojitosti funkce f takové $c \in [a, b]$, že $f(c) = Y$. \square

Důsledek 7.20

Nechť f je spojitá na $[a, b]$. Pak existuje $c \in [a, b]$ tak, že

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b - a).$$

Důkaz. Ve větě 7.19 zvolme $g(x) = 1$. □

8 Transcendentní funkce

8.1 Algebraické a transcendentní funkce

Definice 8.1 (Algebraické číslo)

Algebraické číslo je číslo, které je kořenem polynomu s racionálními koeficienty.

Definice 8.2 (Transcendentní číslo)

Transcendentní číslo je číslo, které není algebraické.

Definice 8.3 (Algebraická funkce)

Algebraická funkce splňuje polynomiální rovnici s polynomiálními koeficienty.

Definice 8.4 (Transcendentní funkce)

Transcendentní funkce je funkce, která není algebraická.

8.2 Logaritmická funkce

Definice 8.5 (Logaritmická funkce)

Logaritmická funkce je nekonstantní diferencovatelná funkce f definovaná na \mathbb{R}^+ , která pro všechny $x > 0$ a $y > 0$ splňuje

$$f(xy) = f(x) + f(y).$$

Věta 8.6 (Vlastnosti logaritmické funkce)

Bud' f logaritmická funkce. Potom

1. $f(1) = 0$
2. $f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$
3. $f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$
4. $f'(x) = \frac{1}{x}f'(1)$, kde $f'(1)$ odpovídá bázi logaritmu.

Důkaz.

1. $f(1) = f(1 \cdot 1) = f(1) + f(1) = 2f(1)$ odkud $f(1) = 0$.
2. $0 = f(1) = f\left(x \cdot \frac{1}{x}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)$ odkud $f(x) = -f\left(\frac{1}{x}\right)$.
3. viz 2.

$$4. f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (f(x+h) - f(x)) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x}{h} \frac{1}{x} f\left(\frac{x+h}{x}\right) \stackrel{u=\frac{h}{x}}{=} \frac{1}{x} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{1}{u} (f(1+u) - \underbrace{f(1)}_0) = \frac{1}{x} f'(1)$$

□

8.3 Přirozený logaritmus

Definice 8.7 (Přirozený logaritmus)

Funkce

$$\ln x = \int_1^x \frac{dt}{t}, \quad (4)$$

pro $x > 0$ se nazývá **přirozený logaritmus**.

Věta 8.8

Funkce \ln je logaritmická funkce.

Důkaz. Předpokládejme bez újmy na obecnosti, že $0 < x < y$.

Podle definice 8.5 musíme ukázat, že $\ln(x \cdot y) = \ln x + \ln y$:

$$\ln(xy) = \int_1^{xy} \frac{dt}{t} = \int_1^x \frac{dt}{t} + \int_x^{xy} \frac{dt}{t} \stackrel{u=\frac{t}{x}}{=} \int_1^x \frac{dt}{t} + \int_1^y \frac{du}{u} = \ln x + \ln y.$$

□

Věta 8.9 (Vlastnosti $\ln x$)

Funkce $\ln x$ definovaná vztahem (4) má následující vlastnosti:

1. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
2. \ln je ostře rostoucí na D_{\ln} .
3. $\ln x^\alpha = \alpha \ln x$ pro $\alpha \in \mathbb{R}$.

Důkaz.

1. Derivací integrálu jakožto funkce horní meze v definici 8.7 dostáváme tvrzení věty, což zároveň odpovídá „přirozené“ volbě $f'(1) = 1$ ve větě 8.6(4.).
2. Pro všechna $x \in D_{\ln} = \mathbb{R}^+$ je $\frac{1}{x} > 0$ a tudíž podle věty 6.7 ostře roste.
3. Pro $\alpha = 0$ tvrzení zjevně platí. Pro $\alpha \neq 0$ máme

$$\ln x^\alpha = \int_1^{x^\alpha} \frac{dt}{t} \stackrel{t=u^\alpha}{=} \alpha \int_1^x \frac{u^{\alpha-1}}{u^\alpha} du = \alpha \ln x.$$

□

Definice 8.10 (Eulerovo číslo)

Eulerovo číslo je jediné číslo, které splňuje $\ln e = 1$.

8.4 Exponenciální funkce

Definice 8.11 (Exponenciální funkce)

Inverzní funkci k funkci \ln nazýváme exponenciální funkcí při základu e a značíme e^x nebo $\exp(x)$.

Věta 8.12 (Vlastnosti exponenciální funkce)

1. $(e^x)' = e^x$ pro $x \in \mathbb{R}$.
2. $e^{x+y} = e^x e^y$ pro $x, y \in \mathbb{R}$.
3. $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$ pro $x \in \mathbb{R}$.

Důkaz.

1. Podle věty 5.10 o derivaci inverzní funkce platí

$$(e^x)' = \frac{1}{\left(\frac{1}{e^x}\right)} = e^x.$$

2. $\ln e^{x+y} = (x+y) \ln e = x+y = x \ln e + y \ln e = \ln e^x e^y$.
3. viz 2.

□

8.5 Obecná mocnina

Definice 8.13 (Obecná mocnina)

Pro $\beta > 0$ a $\alpha \in \mathbb{R}$ definujeme **obecnou mocninu** jako

$$\beta^\alpha = e^{\alpha \ln \beta},$$

kde β je báze (základ) a α exponent (mocnina).

Věta 8.14 (Vlastnosti obecné mocniny)

Nechť $x > 0$ a $a, b \in \mathbb{R}$. Pak

1. $x^{a+b} = x^a x^b$.
2. $x^{-a} = \frac{1}{x^a}$.
3. $(x^a)' = ax^{a-1}$.
4. $(a^x)' = (\ln a) \cdot a^x$.

Důkaz. Všechny body věty plynou z definice 8.13 a vlastností logaritmu.

□

8.6 Obecná báze logaritmu

Definice 8.15 (Obecná báze logaritmu)

Pro $p > 0$, $p \neq 1$ definujeme **logaritmus při základu p** jako

$$\log_p x = \frac{\ln x}{\ln p},$$

kde p je báze (základ). Pro $p = 10$ definujeme dekadický logaritmus a značíme zkráceně symbolem \log .

Věta 8.16 (Vlastnosti logaritmu)

1. $\log_p x$ je inverzní funkce k p^x .
2. $(\log_p x)' = \frac{1}{\ln p} \frac{1}{x}$.

3. $\log_p x$ je logaritmická funkce.

Důkaz.

1. Podle definice 8.15 je funkce \log_p stejně jako \ln prostá na \mathbb{R}^+ . Stačí ověřit obě vlastnosti inverzní funkce $f \circ f^{-1} = \text{id}$ a $f^{-1} \circ f = \text{id}$ (viz věta 2.13):

$$\log_p p^x = \frac{\ln p^x}{\ln p} = \frac{x \ln p}{\ln p} = x,$$

$$p^{\log_p x} = e^{\log_p(x) \cdot \ln p} = e^{\frac{\ln x}{\ln p} \ln p} = e^{\ln x} = x$$

2. Tvrzení plyne přímou derivací definice 8.15 podle x .

3. Ověření vlastnosti logaritmické funkce (viz definice 8.5):

$$\log_p(x \cdot y) = \frac{\ln(x \cdot y)}{\ln p} = \frac{\ln x + \ln y}{\ln p} = \frac{\ln x}{\ln p} + \frac{\ln y}{\ln p} = \log_p x + \log_p y$$

□

8.7 Hyperbolické funkce

Definice 8.17 (Hyperbolické funkce)

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

$$\text{tgh } x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}},$$

$$\text{cotgh } x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

Věta 8.18 (Vlastnosti hyperbolických funkcí \sinh a \cosh)

1. $\cosh x > \frac{1}{2}e^x > \sinh x$
2. $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$.
3. $\sinh(x + y) = \sinh x \cosh y + \sinh y \cosh x$
4. $\cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$

Důkaz. Tvrzení se dokáže dosazením vzorců z definice 8.17. □

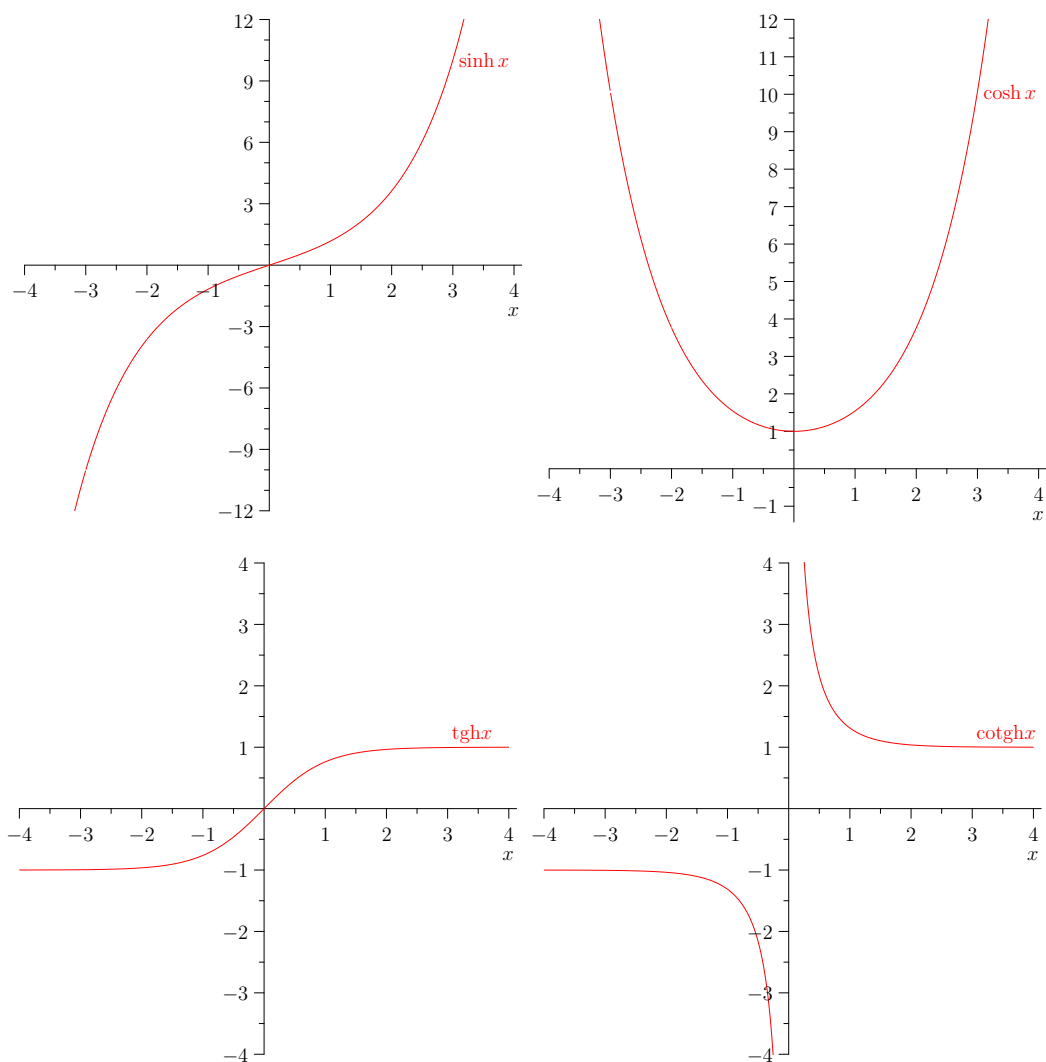
Věta 8.19 (Derivace hyperbolických funkcí)

$$(\sinh x)' = \cosh x, \tag{5}$$

$$(\cosh x)' = \sinh x, \tag{6}$$

$$(\text{tgh } x)' = \frac{1}{\cosh^2 x}, \tag{7}$$

$$(\text{cotgh } x)' = -\frac{1}{\sinh^2 x} \tag{8}$$



Obrázek 3: Grafy hyperbolických funkcí.

8.8 Inverzní hyperbolické funkce

Definice 8.20 (Inverzní hyperbolické funkce)

$$\operatorname{argsinh} x = \sinh^{-1} x$$

$$\operatorname{argcosh} x = \cosh^{-1} x$$

$$\operatorname{argtgh} x = \operatorname{tgh}^{-1} x,$$

$$\operatorname{argcotgh} x = \operatorname{cotgh}^{-1} x,$$

argument hyperbolického sinu,

argument hyperbolického cosinu,

argument hyperbolické tangenty,

argument hyperbolické kotangenty.

Věta 8.21 (Explicitní vyjádření inverzních hyperbolických funkcí)

$$\operatorname{argsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}), \quad \text{pro } x \in \mathbb{R} \quad (9)$$

$$\operatorname{argcosh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}), \quad \text{pro } x \geq 1 \quad (10)$$

$$\operatorname{argtgh} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}, \quad \text{pro } x \in (-1, 1) \quad (11)$$

$$\operatorname{argcotgh} x = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1} \quad \text{pro } x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty). \quad (12)$$

Důkaz. Pro jednotlivé funkce je potřeba odvodit inverzní funkci pomocí techniky explicitního vyjádření $x = f^{-1}(y)$ ze vztahu $y = f(x)$.

1. $y = \sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$, kde vynásobením rovnice e^x dostáváme kvadratickou rovnici pro neznámou „ e^x “:

$$(e^x)^2 - 2ye^x - 1 = 0,$$

kterou řeší

$$e^x = y \pm \sqrt{y^2 + 1}.$$

Z těchto řešení vyhovuje pouze $e^x = y + \sqrt{y^2 + 1}$, protože $H_{e^x} = \mathbb{R}^+$. Odtud již plyne tvrzení věty.

2. Funkce \cosh není na \mathbb{R} prostá a proto nejprve zúžíme definiční obor např. na \mathbb{R}_0^+ tak, abychom dostali prostou funkci. $y = \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$, kde vynásobením rovnice e^x dostáváme kvadratickou rovnici pro neznámou „ e^x “:

$$(e^x)^2 + 2ye^x - 1 = 0,$$

kterou řeší

$$e^x = y \pm \sqrt{y^2 - 1}.$$

Z těchto řešení vyhovuje pouze $e^x = y + \sqrt{y^2 - 1}$, protože pro daný definiční obor funkce $\cosh (x \geq 0)$ je funkce $e^x \geq 1$. Odtud již plyne tvrzení věty.

3. $y = \operatorname{tgh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$, kde vynásobením rovnice $e^x(e^x + e^{-x})$ dostáváme kvadratickou rovnici pro neznámou „ e^x “:

$$(y - 1)(e^x)^2 + y + 1 = 0,$$

kterou řeší

$$e^x = \pm \sqrt{\frac{1+y}{1-y}}.$$

Z těchto řešení vyhovuje pouze to kladné, neb $H_{e^x} = \mathbb{R}^+$. Odtud již plyne tvrzení věty.

4. Inverzní funkce k cotgh – viz 3.

□

Věta 8.22 (Derivace inverzních hyperbolických funkcí)

$$(\operatorname{argsinh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}, \quad (13)$$

$$(\operatorname{argcosh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}, \quad (14)$$

$$(\operatorname{argtgh} x)' = (\operatorname{argcotgh} x)' = \frac{1}{1 - x^2} \quad (\text{pozor na různé definiční obory!}). \quad (15)$$

Důkaz. Větu snadno dokážeme derivací explicitního vyjádření inverzních funkcí ve větě 8.21.

□

8.9 Pokročilé techniky integrace

Poznámka. Dle lemma 3.14 lze snížit druhou mocninu funkcí \sin a \cos :

$$\cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2},$$

$$\sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2},$$

čehož je možné využít při integraci výrazů tvaru $\int \sin^m x \cos^n x dx$, kde $m, n \in \mathbb{N}_0$:

1. Jsou-li m i n sudé:

Použijeme lemma 3.14 na $\int (\sin^2 x)^{\frac{m}{2}} (\cos^2 x)^{\frac{n}{2}} dx$

2. Jsou-li (m sudé a n liché) nebo (m liché a n sudé):

Substituujeme funkci se sudou mocninou (z funkce s lichou mocninou dostaneme diferenciál), např. pro m -sudé, n -liché:

$$\int \sin^m x (\cos^2 x)^{\frac{n-1}{2}} \cos x dx = \left| u = \sin x \right| = \int u^m (1 - u^2)^{\frac{n-1}{2}} du$$

3. Jsou-li m i n liché:

Převodeme integrand pomocí součtových vzorců $2 \sin x \cos x = \sin(2x)$ a lemma 3.14 na výraz předchozích typů, např. pro $m < n$:

$$\int \sin^m x \cos^n x dx = \int (\sin x \cos x)^m (\cos^2 x)^{\frac{n-m}{2}} dx = \int \left(\frac{\sin(2x)}{2} \right)^m \left(\frac{1 + \cos(2x)}{2} \right)^{\frac{n-m}{2}} dx,$$

kde poznamenejme, že $m - n$ je sudé číslo.

Lemma 8.23 (Vzorce pro součin goniometrických funkcí)

$$\cos(mx) \cos(nx) = \frac{1}{2} \left(\cos[(n+m)x] + \cos[(n-m)x] \right)$$

$$\sin(mx) \sin(nx) = \frac{1}{2} \left(\cos[(n-m)x] - \cos[(n+m)x] \right)$$

$$\sin(mx) \cos(nx) = \frac{1}{2} \left(\sin[(m-n)x] + \sin[(n+m)x] \right)$$

Důkaz. Větu dokážeme pomocí součtových vzorců pro funkce \cos a \sin . □

Poznámka. Pomocí lemma 8.23 se integrály typu $\int \cos(\alpha x) \sin(\beta x) dx$, $\int \cos(\alpha x) \cos(\beta x) dx$ a $\int \sin(\alpha x) \sin(\beta x) dx$, pro $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ převedou na známé integrály.

Poznámka.

Typ integrálu	Výsledný typ funkce	Substituce
$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - (x+b)^2}}$	arcsin nebo -arccos	$x + b = a \sin u$ nebo $x + b = a \cos u$
$\int \frac{dx}{a^2 + (x+b)^2}$	arctg nebo -arccotg	$x + b = a \operatorname{tg} u$ nebo $x + b = a \operatorname{cotg} u$
$\int \frac{dx}{\sqrt{(x+b)^2 + a^2}}$	argsinh	$x + b = a \sinh u$
$\int \frac{dx}{\sqrt{(x+b)^2 - a^2}}$	argcosh	$x + b = a \cosh u$
$\int \frac{dx}{(x+b)^2 - a^2}$	argtgh nebo argcotgh	$x + b = a \operatorname{tgh} u$ nebo $x + b = a \operatorname{cotgh} u$

8.10 Příklady

Poznámka. Příklady k procvičení:

1. $\int x \ln x dx$

2. $\int \frac{1}{x} \ln x dx$

3. $\int \frac{\sqrt{x}}{1+x\sqrt{x}} dx$

4. $\int_1^2 \frac{6x^2-2}{x^3-x+1} dx$

5. $\int \frac{\exp(3x)}{\exp(3x)+1} dx$

6. $\int \exp(x) \sin(x) dx$

7. $\int \exp(x) \sinh(x) dx$

8. $\int \sqrt{\frac{1+x^2}{(1-x^4)}} \arcsin x dx$

9. $\int \frac{\operatorname{arctg}(\ln x)}{x} dx$

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x-4x^2}}$

11. $\int \frac{x^2}{\sqrt{3-2x-x^2}} dx$

12. $\int \sqrt{6x-x^2-8} dx$

13. $\int \min\{x^3, x\} dx$

9 Aplikace integrálu

9.1 Výpočet plochy

Věta 9.1 (Výpočet plochy mezi funkcemi)

Nechť jsou f a g funkce spojité na intervalu $[a, b]$. Potom plocha A vymezená těmito funkcemi je

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx.$$

Důsledek 9.2 (Plocha pod grafem funkce)

Nechť je funkce f spojitá a nezáporná na intervalu $[a, b]$. Pak plocha A_f vymezená grafem funkce f a osou x je

$$A_f = \int_a^b f(x) dx.$$

9.2 Výpočet polohy těžiště

Věta 9.3 (Poloha těžiště plochy pod grafem funkce)

Nechť funkce f je spojitá na $[a, b]$. Potom pro těžiště $T = [\bar{x}, \bar{y}]$ plochy pod grafem funkce f platí

$$\bar{x} = \frac{\int_a^b x f(x) dx}{\int_a^b f(x) dx}, \quad \bar{y} = \frac{1}{2} \frac{\int_a^b f^2(x) dx}{\int_a^b f(x) dx}.$$

Důkaz. Pro důkaz věty použijeme analogii postupu hledání těžiště n hmotných bodů z fyziky. Poloha těžiště z_T pro n hmotných bodů o hmotnostech m_k a polohách z_k (na ose z) je

$$z_T = \frac{\sum_{k=1}^n m_k z_k}{\sum_{k=1}^n m_k}.$$

Na chvíli předpokládejme, že uvažovaná plocha pod grafem funkce f má všude stejnou hustotu ϱ . Uvažujme rozdělení $\sigma = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b\}$ intervalu $[a, b]$.

Označme A_k jednotlivé dílčí plochy pod grafem funkce f mezi x_{k-1} a x_k . Dále označme polohu těžiště na ose x symbolem t_k . Snadno nahlédneme, že polohu těžiště A_k na ose y lze vyjádřit $y_k = \frac{1}{2} f(t_k)$. Hmotnost dílčí plochy A_k lze vyjádřit jako $m_k = \varrho f(t_k)(x_k - x_{k-1})$. Každou dílčí plochu A_k lze reprezentovat hmotným bodem o souřadnicích $[t_k, \frac{1}{2} f(t_k)]$ a hmotnosti m_k .

Podle vzorce pro polohu těžiště n hmotných bodů dostáváme pro jednotlivé souřadnice polohy těžiště $x_T(\sigma)$ a $y_T(\sigma)$ (při rozdělení σ) vyjádření

$$x_T(\sigma) = \frac{\sum_{k=1}^n \varrho t_k f(t_k)(x_k - x_{k-1})}{\sum_{k=1}^n \varrho f(t_k)(x_k - x_{k-1})}, \quad (16)$$

$$y_T(\sigma) = \frac{\sum_{k=1}^n \varrho \frac{1}{2} f^2(t_k)(x_k - x_{k-1})}{\sum_{k=1}^n \varrho f(t_k)(x_k - x_{k-1})}, \quad (17)$$

kde $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$. Hustota ϱ je konstantní, proto ji můžeme vykrátit z obou výrazů. Pro dokončení důkazu stačí v jednotlivých sumách odhadnout funkci $t \cdot f(t)$, resp. $f(t)$, resp. $\frac{1}{2}f^2(t)$ svými maximy a minimy na dílčích intervalech $[x_{k-1}, x_k]$, čímž obdržíme horní a dolní částečné součty. Protože jsme v celém odvození uvažovali libovolné rozdělení σ , dostáváme podle Riemannovy definice určitého integrálu 7.11 tvrzení věty. \square

9.3 Délka grafu funkce

Věta 9.4 (Délka grafu funkce)

Nechť funkce f má spojitou první derivaci na intervalu $[a, b]$. Potom délka grafu funkce L_f je

$$L_f = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} \, dx.$$

Důkaz. Nechť σ je rozdělení intervalu $[a, b]$. S využitím Pythagorovy věty můžeme délku grafu funkce aproximovat úsečkou délky d_k na každém dílčím intervalu $[x_{k-1}, x_k]$ takto:

$$d_k = \sqrt{(f(x_k) - f(x_{k-1}))^2 + (x_k - x_{k-1})^2} = (x_k - x_{k-1}) \sqrt{1 + \left(\frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} \right)^2}.$$

Na intervalu $[x_{k-1}, x_k]$ použijeme Lagrangeovu větu 6.3 o přírůstku funkce: $\exists c_k \in (x_{k-1}, x_k)$ tak, že

$$d_k = (x_k - x_{k-1}) \sqrt{1 + (f'(c_k))^2}.$$

Označíme-li

$$m_k = \min \left\{ \sqrt{1 + (f'(z))^2} : z \in [x_{k-1}, x_k] \right\},$$

$$M_k = \max \left\{ \sqrt{1 + (f'(z))^2} : z \in [x_{k-1}, x_k] \right\},$$

dostáváme nerovnost

$$(x_k - x_{k-1})m_k \leq d_k \leq (x_k - x_{k-1})M_k$$

pro všechna k . Sečteme-li tuto nerovnost přes všechna $k = 1, 2, \dots, n$, máme

$$s_{\sqrt{1+(f')^2}}(\sigma) \leq L_f(\sigma) \leq S_{\sqrt{1+(f')^2}}(\sigma).$$

Odtud již plyne tvrzení věty. \square

9.4 Objem a povrch rotačního tělesa

Věta 9.5 (Objem rotačního tělesa)

Nechť funkce f je nezáporná a má spojitou první derivaci na intervalu $[a, b]$. Potom objem rotačního tělesa, které vznikne rotací grafu f okolo osy x je

$$V_f = \pi \int_a^b f^2(x) \, dx.$$

Věta 9.6 (Povrch rotačního tělesa)

Nechť funkce f je nezáporná a má spojitou první derivaci na intervalu $[a, b]$. Potom povrch rotačního tělesa, které vznikne rotací grafu f okolo osy x je

$$S_f = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Reference

- [1] E. Dontová, *Matematika I*, Vydavatelství ČVUT, 1999
- [2] E. Dontová, *Matematika II*, Vydavatelství ČVUT, 1996
- [3] V. Jarník, *Diferenciální počet I*, ČSAV, 1955
- [4] S. L. Salas, E. Hille, *Calculus, One Variable* John Wiley and Sons, 1990 (6th edition), ISBN 0-471-51749-6