

# Zkouškové otázky 01MATZ1

Verze 17. října 2022

1. Napište pravidla pro negování disjunkce, konjunkce, implikace a ekvivalence dvou výroků. Znegujte definici limity funkce  $f$  v bodě  $a$ .
2. Vyslovte a dokažte trojúhelníkovou nerovnost pro reálná čísla. Napište trojúhelníkovou nerovnost pro integrály a vysvětlete graficky.
3. Napište trojúhelníkovou nerovnost. Dokažte nerovnost

$$\left| |a| - |b| \right| \leq |a - b|.$$

4. Definujte polynom. Vyslovte Základní větu algebry a napište vše, co víte o existenci kořenů polynomů.
5. Napište definici inverzní funkce. Vyslovte a dokažte větu o existenci a jednoznačnosti inverzní funkce.
6. Napište, jaký je vztah mezi  $(f \circ g)^{-1}$ ,  $f^{-1}$  a  $g^{-1}$  a tento vztah dokažte.
7. Napište definici složené funkce  $f \circ g$ . Zdůvodněte, zda obecně platí  $f \circ g = g \circ f$  a uveďte příklady.
8. Napište definici inverzní funkce. Jaký je podstatný rozdíl mezi funkcemi  $f \circ f^{-1}$  a  $f^{-1} \circ f$ ?
9. Napište definici liché a sudé funkce. Nechť  $D_f = \mathbb{R}$ . Ukažte, že funkce  $g$  definovaná vztahem

$$g(x) = f(x) - f(-x)$$

je lichá funkce a funkce  $h$  definovaná vztahem

$$h(x) = f(x) + f(-x)$$

je sudá funkce.

10. Vyslovte a dokažte větu o jednoznačnosti limity funkce.
11. Vyslovte a dokažte větu o limitě sevřené funkce.
12. Dokažte  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ .
13. Napište definici limity funkce v bodě  $a$ , sepište základní vlastnosti limity (limita součtu, rozdílu, součinu a podílu funkcí).
14. Napište definici limity funkce v nekonečnu a z této definice ukažte, že

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty.$$

15. Napište definici jednostranných limit funkce  $f$  v bodě  $a$ . Jaký má existence těchto jednostranných limit vztah k existenci limity v bodě  $a$ ?

16. Napište definice asymptot funkce  $f$  v  $+\infty$  a v  $-\infty$ . Vyslovte a dokažte větu o jejich nalezení. Co je to vertikální asymptota?
17. Vyslovte a graficky dokažte Bolzanovu větu o existenci řešení  $f(x) = 0$ . Vyslovte a dokažte Darbouxovu větu o existenci řešení  $f(x) = d$ .
18. Napište definici spojitosti funkce  $f$  v bodě  $a$  a spojitosti funkce  $f$  na uz. intervalu  $[a, b]$ . Uveďte typy nespojitosti a jejich příklady.
19. Napište definici minima a maxima funkce  $f$  v bodě  $a$ . Kdy lze s jistotou říct, že funkce na uzavřeném intervalu nabývá svého minima i maxima (tj. vyslovte Weierstrassovu větu)?
20. Vyslovte větu o limitě derivace a použijte ji k nalezení  $f'_-(1)$  a  $f'_+(1)$  pro

$$f(x) = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}.$$

21. Vyslovte a dokažte větu o vztahu derivace a spojitosti funkce.
22. Vyslovte a dokažte větu o vztahu derivace a monotonie funkce.
23. Vyslovte a dokažte větu o derivaci podílu dvou funkcí.
24. Vyslovte a z definice derivace dokažte větu o derivaci součinu funkcí  $(fg)'$ . Pomocí této věty ukažte, že  $(fgh)' = f'gh + fg'h + fgh'$ .
25. Vyslovte a dokažte větu o derivaci složené funkce (řetězové pravidlo).
26. Vyslovte a dokažte větu o derivaci inverzní funkce. Ukažte na příkladu funkcí  $\arcsin$  a  $\arctg$ .
27. Napište definici derivace funkce  $f$  v bodě  $a$  a z této definice ukažte, jak vypadá derivace funkce  $f(x) = \cos(x)$ .
28. Napište definici derivace funkce  $f$  v bodě  $a$  a z této definice ukažte, jak vypadá derivace funkce  $f(x) = \sin(x)$ .
29. Vysvětlete princip důkazu matematickou indukcí a demonstруйте na důkazu derivace funkce  $f(x) = x^n$  pro  $n \in \mathbb{N}$ .
30. Vyslovte a dokažte větu o nalezení rovnice tečny  $t_f(a)$ .
31. Vyslovte a dokažte větu o nalezení rovnice normály  $n_f(a)$ .
32. Vyslovte Leibnizovo pravidlo pro  $n$ . derivaci součinu funkcí. Ověřte jeho platnost pro  $n = 1$  a  $n = 2$ .
33. Vyslovte a dokažte Lagrangeovu větu o přírůstku funkce.
34. Vyslovte a dokažte Rolleho větu o přírůstku funkce.
35. Vyslovte l'Hôpitalovo pravidlo a uveďte příklady jeho použití.

36. Vysvětlete test extrému pomocí první derivace. Uveďte příklady.
37. Vysvětlete test extrému pomocí druhé derivace. Uveďte příklady.
38. Napište definici (ryze) konvexní a (ryze) konkávní funkce. Napište definici inflexního bodu. Uveďte příklady.
39. Vyslovte a dokažte větu o střední hodnotě integrálu.
40. Vyslovte a dokažte větu o integraci per partes pro neurčitý integrál.
41. Vyslovte a dokažte větu o integraci metodou substituce pro neurčitý integrál.
42. Vyslovte a dokažte Newtonovu větu pro počítání určitého integrálu pomocí primitivní funkce.
43. Vyslovte větu o metodě per partes a o metodě substituce v určitém integrálu.
44. Napište definice primitivní funkce, neurčitého a určitého integrálu. Jaký je mezi nimi vztah ?
45. Napište definici určitého Riemannova integrálu funkce  $f$  (definujte a vysvětlete všechny příslušné pojmy a ilustруйте je na obrázku).
46. Co je to integrál jako funkce horní (dolní) meze a jak vypadá derivace takové funkce?
47. Vyslovte větu o derivaci inverzní funkce. Napište definiční obory a obory hodnot funkcí  $\operatorname{tgh}$  a  $\operatorname{cotgh}$  a pomocí věty nalezněte derivace jejich inverzních funkcí  $\operatorname{argtgh}$  a  $\operatorname{argcotgh}$ . Jsou tyto derivace stejné?
48. Definujte algebraické a transcendentní číslo a uveďte jejich příklady. Definujte algebraickou a transcendentní funkci a uveďte příklady.
49. Definujte obecnou logaritmickou funkci a z této definice ukažte, že každá logaritmická funkce  $f$  splňuje
- $f(1) = 0$ ,
  - $f(x) = -f(1/x)$ .
50. Definujte obecnou logaritmickou funkci a definujte přirozený logaritmus  $\ln$  pomocí integrálu jako funkce horní meze. Dokažte, že takto definovaná funkce  $\ln$  je logaritmickou funkcí.
51. Napište definici exponenciální funkce  $e^x$  a pomocí věty o inverzní funkci dokažte, že  $(e^x)' = e^x$ .
52. Napište definice hyperbolických funkcí  $\sinh$  a  $\cosh$ . Dokažte
- $\cosh^2 x - \sinh^2 x = ?$ ,
  - $\cosh(x + y) = ?$ .
53. Napište definice hyperbolických funkcí  $\sinh$  a  $\cosh$ . Dokažte
- $\cosh^2 x - \sinh^2 x = ?$ ,

(b)  $\sinh(x + y) = ?$ .

54. Odvoďte vzorec pro  $\sin mx \sin nx$ .

55. Odvoďte vzorec pro  $\cos mx \cos nx$ .

56. Odvoďte vzorec pro  $\sin mx \cos nx$ .

57. Dokažte, že  $\operatorname{argsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$  a uveďte definiční obor.

58. Dokažte, že  $\operatorname{argcosh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$  a uveďte definiční obor.

59. Napište definiční obor, obor hodnot a nakreslete graf následujících funkcí:

(a)  $\arcsin(\sin(x))$

(b)  $\sin(\arcsin(x))$

60. Definujte logaritmus a exponenciální funkci s obecnou bází (základem)  $p$ . Nalezněte derivace těchto funkcí a v závislosti na  $p$  popište jejich průběh (monotonii, extrémy, konvexnost/konkávnost a limity v krajích def. oboru).

61. Vyslovte a stručně dokažte větu o délce grafu funkce.

62. Vyslovte větu o nalezení polohy těžiště plochy pod grafem funkce a použijte ji na příkladě.

63. Vyslovte věty o nalezení objemu a povrchu tělesa, které vznikne rotací funkce  $f$  okolo osy  $x$  nebo osy  $y$ . Použijte tuto větu k odvození vzorce pro objem a povrch koule, kužele a válce.